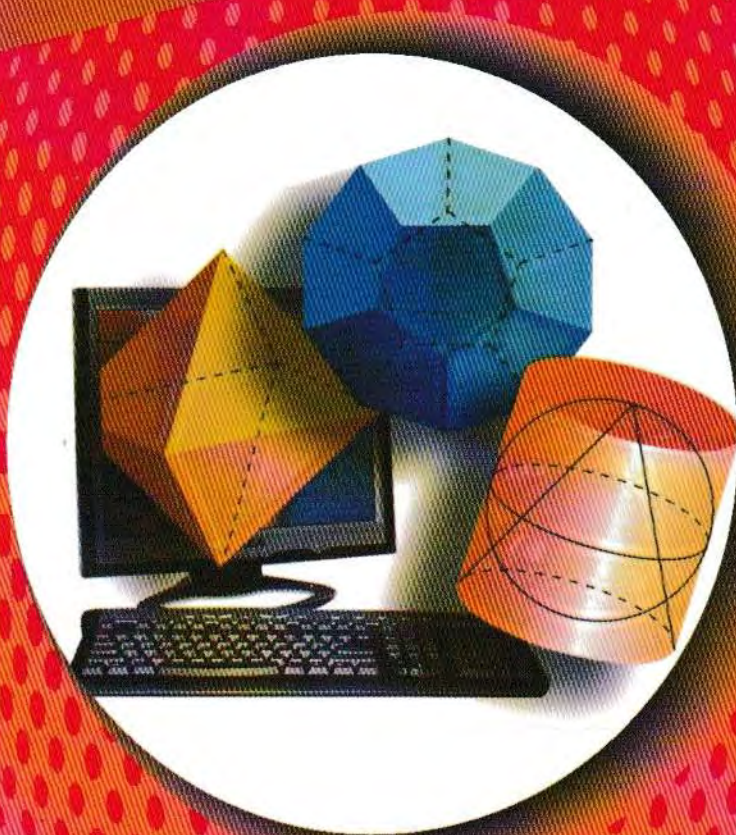


4

Circunferencia

Teoría y Práctica

GEOMETRÍA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Manuel Guevara - Luis Lazo

FONDO EDITORIAL
ARODO

4

Circunferencia

Teoría y Práctica

GEOMETRÍA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Manuel Guevara - Luis Lazo

FONDO EDITORIAL
ARODO



PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

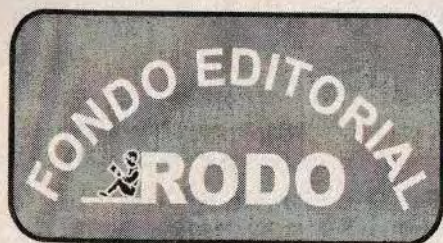
Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2013, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO
De: Walter Z. Benítez Nuñez.

CIRCUNFERENCIA



GEOMETRÍA - TEMA SELECTO 04, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Noviembre 2013 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424 - 6350 📠 992 - 796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

N°: 2013 - 17308

EQUIPO PEDAGÓGICO

Manuel Guevara

Luis Lazo

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

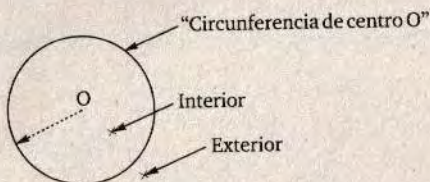
Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

CIRCUNFERENCIA

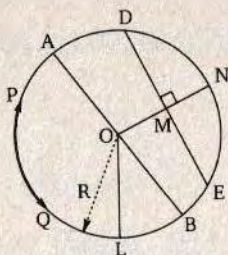
DEFINICIÓN

Es una línea cerrada simple, cuyos puntos equidistan de un punto de su interior, a dicho punto se le denomina centro de la circunferencia.

Representación gráfica



Elementos:



Radio: $\overline{OL}$ ($OL = R$)

Cuerda: $\overline{DE}$

Flecha o sagita: $\overline{MN}$

Diámetro: $\overline{AB}$ ($AB = 2R$)

Arco $PQ \equiv \widehat{PQ}$

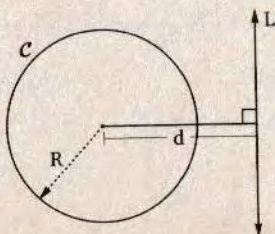


NOTA

- Los diámetros son cuerdas a las que no les corresponde flechas.
- El arco es una parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de esta.

POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

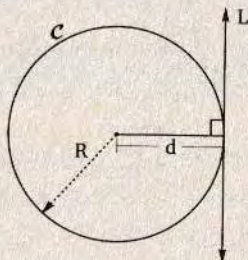
Recta Exterior: Es aquella recta que se encuentra separada del centro a una distancia mayor al radio.



$\bar{L}$: Recta exterior a C

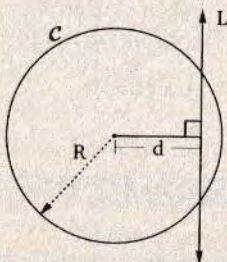
$$d > R$$

Recta Tangente: Es aquella recta que se encuentra separada del centro a una distancia igual al radio. Esta recta toca en un punto a la circunferencia, al cual se le conoce como punto de contacto o punto de tangencia.

 $\bar{L}$: Recta tangente a C

$$d = R$$

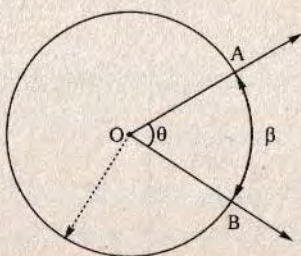
Recta Secante: Es aquella recta que se encuentra separada del centro a una distancia menor que el radio. Esta recta corta a la circunferencia en dos puntos.

 $\bar{L}$: Recta secante a C

$$d < R$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE UN ÁNGULO Y UNA CIRCUNFERENCIA

Ángulo Central: Tiene como vértice al centro de la circunferencia.

 $\angle AOB$: Ángulo central

O: centro

NOTA

- A todo ángulo central le corresponde un arco, ubicado en su interior, cuyos extremos los determinan los lados del ángulo al cortar a la circunferencia.
- Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre las medidas de un ángulo central y la de su arco correspondiente la cuál está basada en una relación de proporción directa.

Definición: La medida de un arco determinado por un ángulo central, es igual a la medida de dicho ángulo.

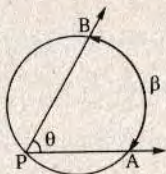
En el gráfico anterior:

$$\beta = \theta$$

NOTA

- La medida de una circunferencia es 360° .

Ángulo Inscrito: Tiene su vértice en la circunferencia y sus lados cortan a la misma.

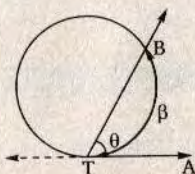


$\angle APB$: Ángulo inscrito

Se cumple:

$$\theta = \frac{\beta}{2}$$

Ángulo Semi-inscrito: Tiene su vértice en la circunferencia, uno de sus lados es tangente y el otro secante a la circunferencia.



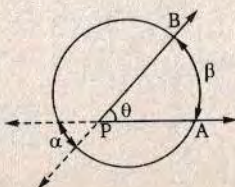
$\angle ATB$: Ángulo semi - inscrito

T: punto de tangencia.

Se cumple:

$$\theta = \frac{\beta}{2}$$

Ángulo Interior: Tiene su vértice en el interior de la circunferencia.



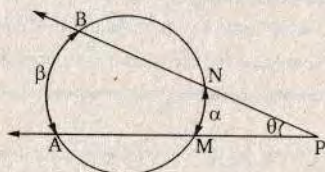
$\angle APB$: Ángulo interior

Se cumple:

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Ángulo Exterior: Tiene su vértice en el exterior de la circunferencia y sus lados pueden ser; ambos secantes, ambos tangentes o uno secante y el otro tangente a la circunferencia.

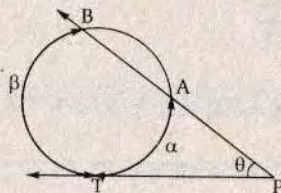
a)

 $\angle APB$: Ángulo exterior

Se cumple:

$$\theta = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

b)

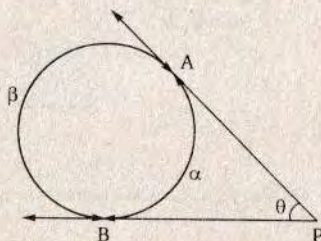
 $\angle TPB$: Ángulo exterior

T: punto de tangencia

Se cumple:

$$\theta = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

c)

 $\angle BPA$: Ángulo exterior

A y B: puntos de tangencia

Se cumple:

$$\theta = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

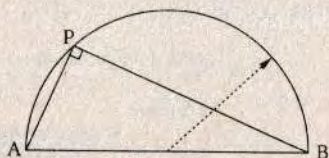
Además:

$$\alpha + \theta = 180^\circ$$

$$\beta - \theta = 180^\circ$$

NOTA

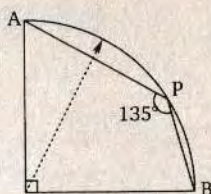
- Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia mide 90°

 $\widehat{AB}$: Semicircunferencia $\overline{AB}$: DiámetroSi: $P \in \widehat{AB}$

Se cumple:

$$m\angle APB = 90^\circ$$

- Todo ángulo inscrito en un cuadrante mide 135°



$\widehat{AB}$: Cuadrante

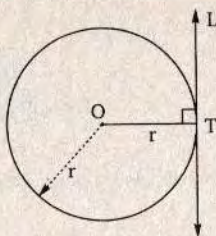
Si: $P \in \widehat{AB}$

Se cumple:

$$m\angle APB = 135^\circ$$

TEOREMAS

Teorema: Al trazar una recta tangente a una circunferencia, el radio que tiene su extremo en el punto de contacto es perpendicular a la recta tangente.



Si: T es punto de tangencia.

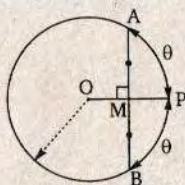
Entonces:

$$\overline{OT} \perp \overline{L}$$

y

$$OT = r$$

Teorema: El radio que corta perpendicularmente a una cuerda, biseca tanto a la cuerda como a su arco correspondiente.



Si: $\overline{OP} \perp \overline{AB}$

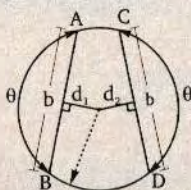
Entonces:

$$AM = MB$$

y

$$m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$$

Teorema: A cuerdas de igual longitud le corresponden arcos de igual medida.



Si: $AB = CD$

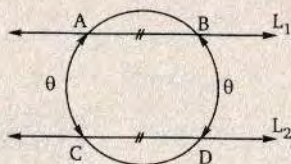
Entonces:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$$

y

$$d_1 = d_2$$

Teorema: Dos rectas paralelas entre sí y secantes a una circunferencia determinan en ésta, arcos de igual medida, los cuales se encuentran entre las rectas.

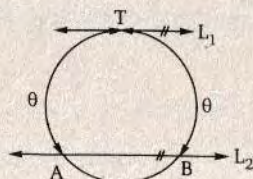


Si: $L_1 \parallel L_2$

Entonces:

$$m\widehat{AC} = m\widehat{BD}$$

Teorema: Dos rectas paralelas entre sí, una tangente y la otra secante a una circunferencia determinan en ésta arcos de igual medida, los cuales se encuentran entre las rectas.



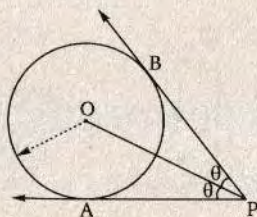
Si: $L_1 \parallel L_2$ y T es punto de tangencia

Entonces:

$$m\widehat{AT} = m\widehat{BT}$$

Teorema: Las tangentes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior a ella, son de igual longitud.

Teorema: La línea que une el centro de una circunferencia con un punto exterior a ella, biseca el ángulo determinado por las tangentes trazadas de dicho punto a la circunferencia.



Si A y B son puntos de tangencia

Entonces:

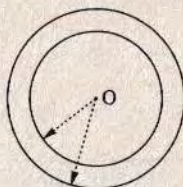
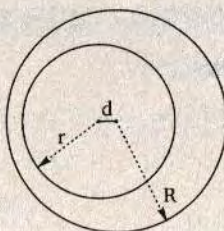
$$PA = PB$$

y

$\overrightarrow{PO}$: Bisectriz del ángulo APB

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS**Circunferencias concéntricas**

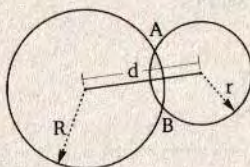
O: centro de ambas

**Circunferencias excéntricas**

$$d < R - r$$

Circunferencias secantes

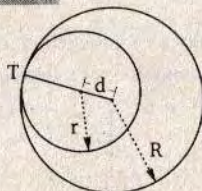
A y B: puntos de corte



$$R - r < d < R + r$$

Circunferencias tangentes interiores

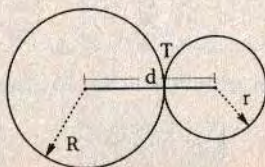
T: Punto de contacto



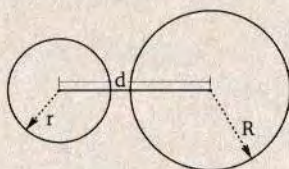
$$d = R - r$$

Circunferencias tangentes exteriores

T: Punto de contacto.



$$d = R + r$$

Circunferencias exteriores

$$d > R + r$$

NOTA**CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES**

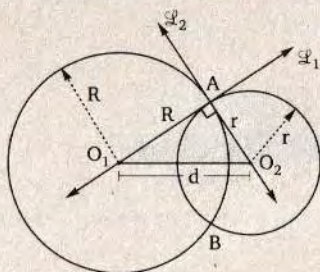
Son dos circunferencias secantes, tal que las tangentes trazadas por un punto de corte forman ángulos de medida 90° .

Representación gráfica:

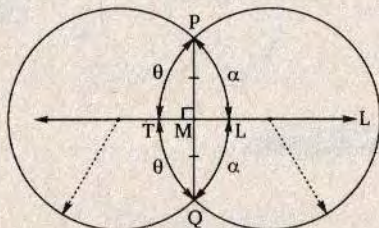
$\overline{\mathcal{L}}_1$: Recta tangente a la circunferencia de centro O_2

$\overline{\mathcal{L}}_2$: Recta tangente a la circunferencia de centro O_1 .

Además se cumple: $d^2 = r^2 + R^2$

**TEOREMAS**

Teorema: La recta que pasa por los centros de dos circunferencias secantes, biseca al segmento y a los arcos, que tienen por extremos a los puntos de corte de las circunferencias.



$\overline{L}$: Recta que contiene a los centros de las circunferencias.

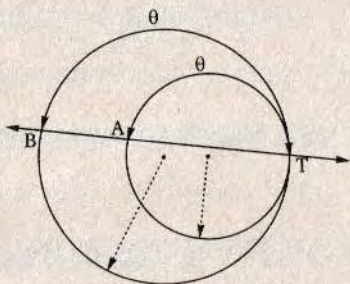
$$PM = MQ$$

$$m\widehat{PT} = m\widehat{TQ}$$

$$m\widehat{PL} = m\widehat{LQ}$$

CIRCUNFERENCIA

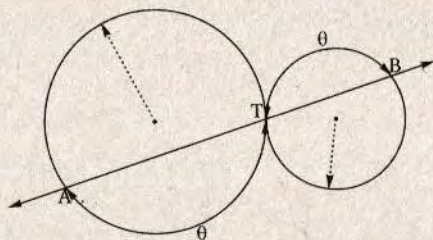
Teorema: Toda recta que corta a dos circunferencias tangentes interiores y pasa por su punto de contacto, determina en éstas arcos de igual medida que se encuentran a un mismo lado de la recta.



Si T es punto de contacto
Entonces:

$$\widehat{mTA} = \widehat{mTB}$$

Teorema: Toda recta que corta a dos circunferencias tangentes exteriores y pasa por su punto de contacto, determina en éstas arcos de igual medida que se encuentran a distintos lados de la recta.

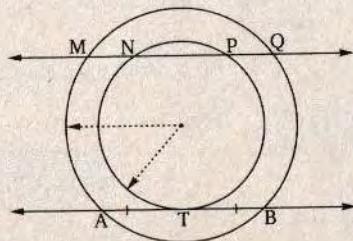


Si T es punto de contacto
Entonces:

$$\widehat{mTA} = \widehat{mTB}$$

Teorema: Si una recta corta a una de dos circunferencias concéntricas en los puntos A y B y es tangente a la otra en el punto T, entonces $AT = TB$.

Teorema: Si una recta corta a una de dos circunferencias concéntricas en los puntos M y Q y a la otra en los puntos N y P, entonces $MN = PQ$.



T es punto de tangencia.

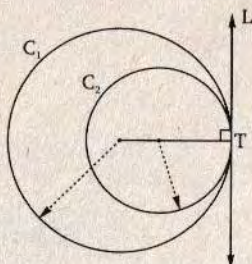
$$AT = TB$$

y

$$MN = PQ$$

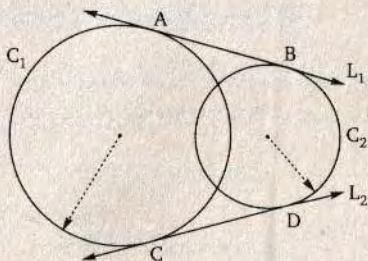
RECTAS TANGENTES COMUNES A DOS CIRCUNFERENCIAS

a)



T : Punto de tangencia
 $\overline{L}$: Tangente común a C_1 y C_2

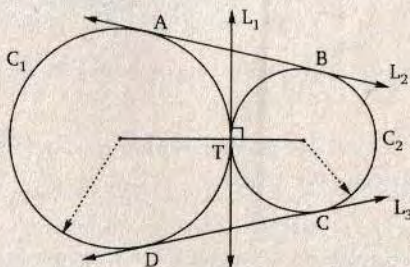
b)



A, B, C y D : Puntos de tangencia
 $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$: Tangentes comunes a C_1 y C_2

$$AB = CD$$

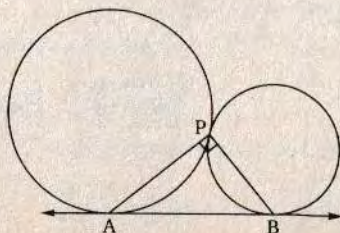
c)



A, B, C, D y T : Puntos de tangencia.

$\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$ y $\overline{L_3}$: Tangentes comunes a C_1 y C_2

TEOREMA:



Si: A, P y B son puntos de tangencia.

Entonces:

$$m\angle APB = 90^\circ$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE UN POLÍGONO Y UNA CIRCUNFERENCIA

Polígono inscrito en una circunferencia

Es aquel que tiene todos sus vértices sobre una circunferencia.

Polígono circunscrito a una circunferencia

Es aquel que tiene todos sus lados tangentes a una circunferencia.

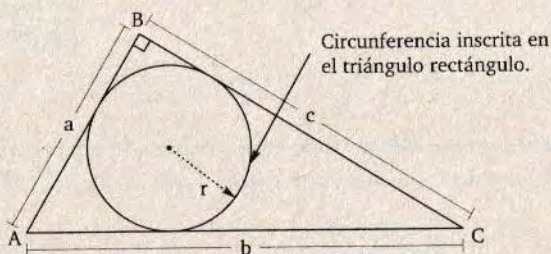


NOTA

- Si una figura A está inscrita en otra figura B, entonces la figura B está circunscrita a la figura A.
- El radio de la circunferencia inscrita en un polígono es el inradio del polígono.
- Todo triángulo posee una circunferencia inscrita y un inradio.
- El radio de la circunferencia circunscrita en un polígono es el circunradio del polígono.
- Todo triángulo posee una circunferencia circunscrita y un circunradio.

Teorema de Poncelet:

La suma de longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual a la suma de la longitud de su hipotenusa y el doble de su inradio.

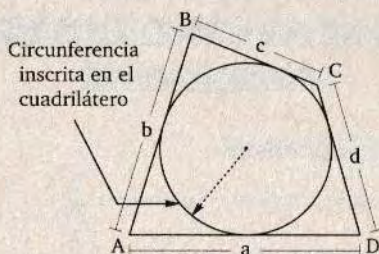


r : inradio del $\triangle ABC$

$$a + c = b + 2r$$

Teorema de Pitot:

La suma de longitudes de dos lados opuestos de un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia es igual a la suma de longitudes de los otros dos.



$\triangle ABCD$: Cuadrilátero circunscrito a la circunferencia

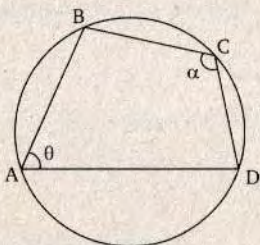
Se cumple:

$$a + c = b + d$$

TEOREMAS DEL CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

Teorema:

Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios.



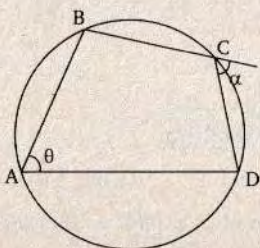
$ABCD$: Cuadrilátero
Inscrito en la
circunferencia

Se cumple:

$$\theta + \alpha = 180^\circ$$

Teorema:

Un ángulo interior de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia mide igual que el ángulo exterior en el vértice opuesto.



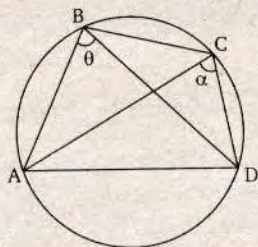
$ABCD$: Cuadrilátero
Inscrito en la
circunferencia

Se cumple:

$$\theta = \alpha$$

Teorema:

El ángulo entre un lado y una diagonal de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia mide igual que el ángulo entre el lado opuesto y la otra diagonal.



ABCD: Cuadrilátero
Inscrito en la
circunferencia

Se cumple:

$$\theta = \alpha$$

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

A veces es posible construir una circunferencia que pase por todos los vértices de un cuadrilátero, quedando este inscrito en tal circunferencia. Cuando es posible esta construcción, es decir cuando es posible inscribir un cuadrilátero en una circunferencia, se dice que tal cuadrilátero es inscriptible.

Existen diversos criterios para determinar si un cuadrilátero es inscriptible, de entre los cuales, en este párrafo, se ha escogido el criterio del recíproco de las propiedades del cuadrilátero inscrito. Es decir, si en algún cuadrilátero se cumple al menos una de las propiedades del cuadrilátero inscrito, entonces dicho cuadrilátero es inscriptible.

Estas ideas están ordenadas en los siguientes teoremas.

Teorema:

Todo cuadrilátero en el que los ángulos opuestos son suplementarios, es inscriptible.

Teorema:

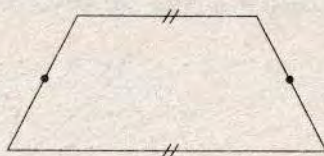
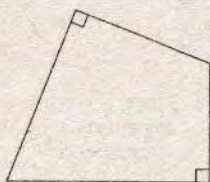
Todo cuadrilátero en el que un ángulo interior mida igual que el ángulo exterior en el vértice opuesto, es inscriptible.

Teorema:

Todo cuadrilátero en el que un lado y una diagonal determinen un ángulo de igual medida que el ángulo determinado por el lado opuesto y la otra diagonal es inscriptible.

A continuación se muestran algunos de los cuadriláteros inscriptibles que se presentan con mayor frecuencia en los problemas.

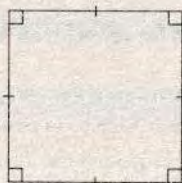
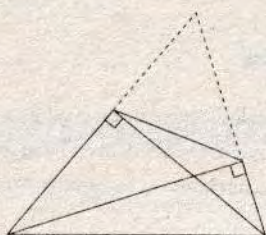
- Cuadrilátero con ángulos opuestos rectos. ➤ Trapecio isósceles



- Cuadrilátero cuyas diagonales son dos alturas de un triángulo

- Cuadrado

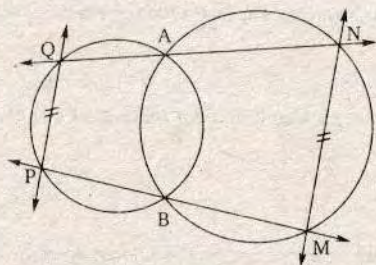
- Rectángulo



NOTA

Teorema:

Dada dos circunferencias que se cortan en los puntos A y B y dos rectas que pasando por A y B cortan a las dos circunferencias, entonces las rectas que pasan por los puntos de corte determinados en la misma circunferencia son paralelas.



Se cumple:

$$\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$$

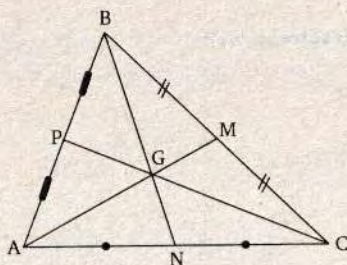
PUNTOS NOTABLES**DEFINICIÓN**

Los puntos notables son puntos donde concurren las líneas notables (regidas por la misma definición) o las prolongaciones de éstas.

BARICENTRO

Es el punto de concurrencia de las medianas de un triángulo.

El baricentro divide a cada mediana en la razón de 2 a 1 siendo la porción de mayor longitud el segmento que une el vértice con el baricentro del triángulo.



G: Baricentro del $\triangle ABC$

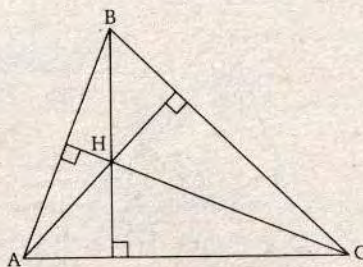
Se cumple:

$AG = 2(GM)$
$BG = 2(GN)$
$CG = 2(GP)$

ORTOCENTRO

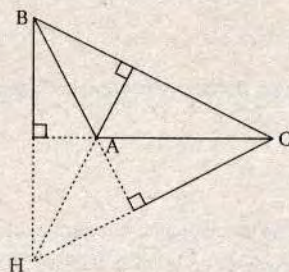
Es el punto donde concurren las alturas de un triángulo o las prolongaciones de éstas.

- $\triangle ABC$: Acutángulo



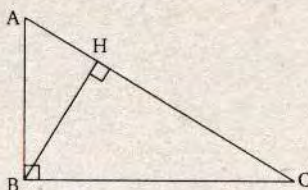
H: Ortocentro del $\triangle ABC$

- $\triangle ABC$: Obtusángulo (obtusó en "A")



H: Ortocentro del $\triangle ABC$

- $\triangle ABC$: Rectángulo (recto en "B")



Nótese que:

$\overline{AB}$: Altura

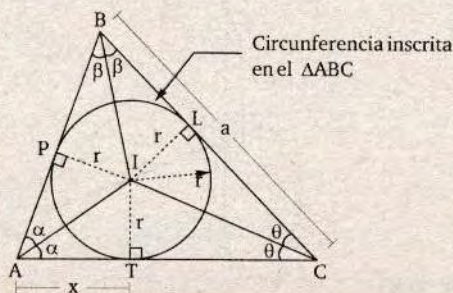
$\overline{CB}$: Altura

B : Ortocentro del $\triangle ABC$

INCENTRO

Es el punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo.

El incentro equidista de los lados del triángulo; además es el centro de la circunferencia inscrita.



I: incentro del $\triangle ABC$

Se cumple:

$$IL = IT = IP = r$$

$$x = p - a$$

Siendo:

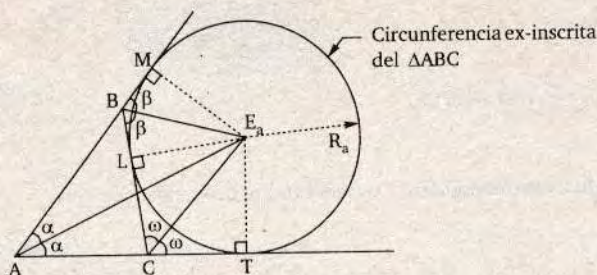
r : Inradio del $\triangle ABC$

p : Semiperímetro del $\triangle ABC$

EX-CENTRO

Es el punto donde concurren las bisectrices de dos ángulos exteriores y la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo.

Todo triángulo tiene tres excentros (cada uno respecto a un lado). Cada excentro equidista de los lados del triángulo; además son centros de las circunferencias ex-inscritas.



E_a : Excentro del $\triangle ABC$ relativo a $\overline{BC}$

Se cumple:

$$E_a L = E_a T = E_a M = R_a$$

$$AM = AT = p$$

Siendo:

R_a : Exradio del $\triangle ABC$ relativo al lado $\overline{BC}$

p : Semiperímetro del $\triangle ABC$

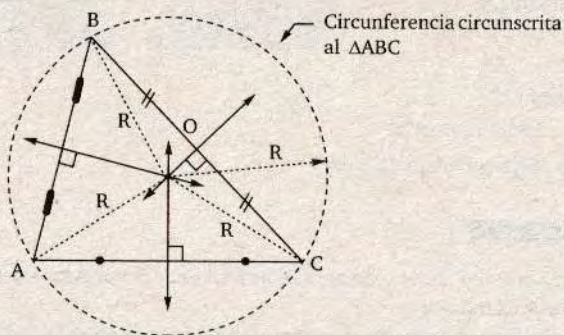
CIRCUNCENTRO

Es el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

El circuncentro de un triángulo equidista de los vértices de éste; además es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

A continuación se muestra la ubicación del circuncentro de acuerdo a la naturaleza del triángulo

ΔABC : acutángulo (El circuncentro se ubica en el interior)



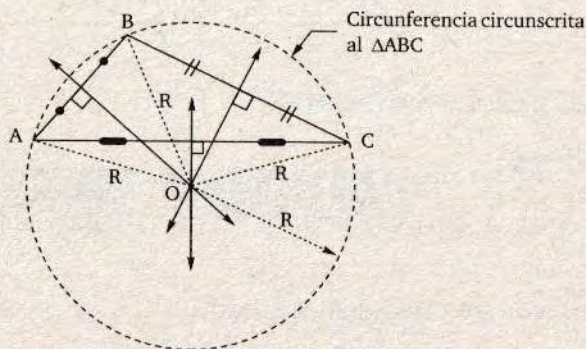
O : circuncentro del ΔABC

Se cumple:

$$AO = BO = CO = R$$

R : Circunradio del ΔABC

ΔABC : Obtusángulo (El circuncentro se ubica en el exterior)



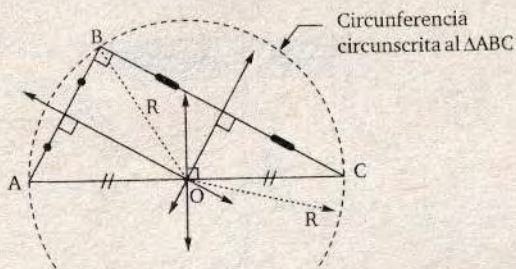
O : Circuncentro del ΔABC

Se cumple:

$$AO = BO = CO = R$$

R : Circunradio del ΔABC

$\triangle ABC$: Rectángulo (El circuncentro se ubica en el punto medio de la hipotenusa)



O : Circuncentro del $\triangle ABC$

O : Punto medio de la hipotenusa

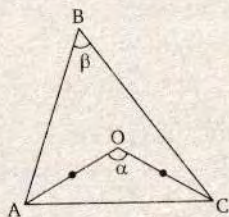
Se cumple:

$$AO = BO = CO = R$$

R : Circunradio del $\triangle ABC$

TEOREMAS:

1)



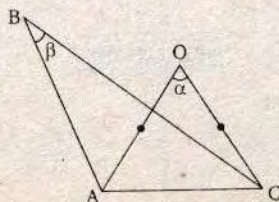
Si "O" es circuncentro del $\triangle ABC$

Se cumple:

$$\alpha = 2\beta$$

$$AO = OC$$

2)



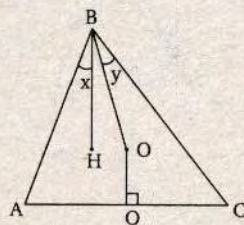
Si "O" es circuncentro del $\triangle ABC$ (obtusó en A)

Se cumple:

$$\alpha = 2\beta$$

$$AO = OC$$

3)



Si

H : Ortocentro

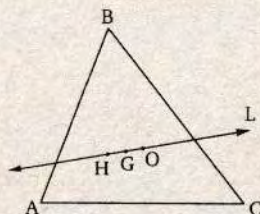
O : Circuncentro

Se cumple:

$$x = y$$

$$BH = 2(OQ)$$

4)



Si:

H : ortocentro

G : baricentro

O : Circuncentro

Se cumple: H, G y O son colineales

$\overleftrightarrow{L}$: recta de Euler.

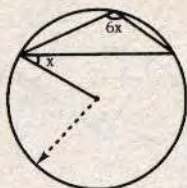
Además:

$$HG = 2(GO)$$



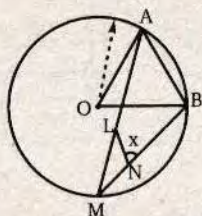
PROBLEMAS RESUELTOS

1. Del gráfico, calcule x .



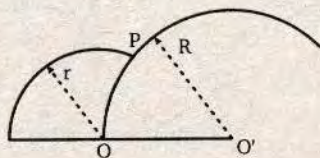
- A) 15° B) 18° C) 20°
D) 22° E) $45^\circ/2$

2. Según el gráfico, el triángulo AOB es equilátero. Si $MN = NL$, calcule x .



- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 65°

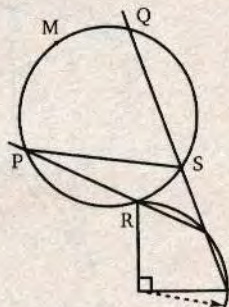
3. Del gráfico mostrado, si se sabe que: $r = 2$ y $R = \sqrt{10}$, calcule $m\widehat{OP}$



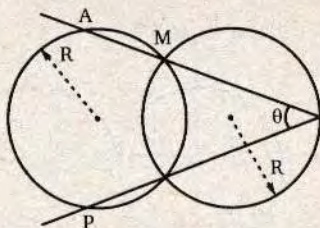
- A) 15° B) $37^\circ/2$ C) $53^\circ/2$
D) 30° E) 37°

4. Si la $m\widehat{PMQ} = 120^\circ$, calcule la $m\widehat{RS}$.

- A) 30°
B) 35°
C) 40°
D) 50°
E) 55°

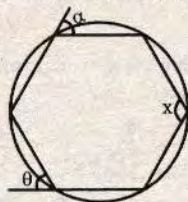


5. Del gráfico, si la $m\widehat{AMP} = 200^\circ$ calcule θ .



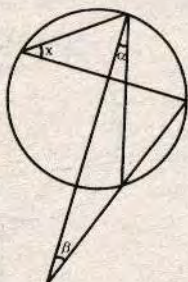
- A) 15° B) 25° C) 30°
D) 40° E) 50°

6. Del gráfico que se muestra, calcule x



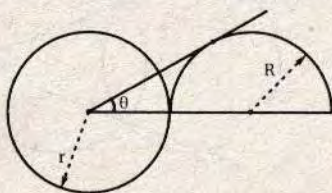
- A) $\alpha + \theta$ B) α C) θ
D) $\frac{\alpha - \theta}{2}$ E) $2(\alpha + \theta)$

7. En el gráfico mostrado, calcule x si:
 $\alpha + \beta = 40^\circ$.



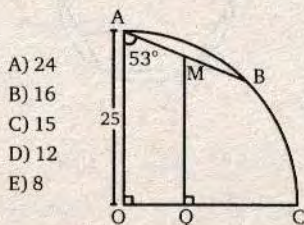
- A) 30° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

8. Hallar $\frac{R}{r}$; para $\theta = 37^\circ$



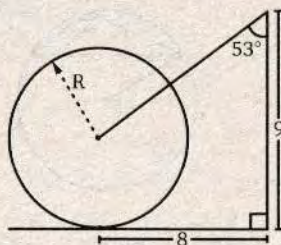
- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

9. En el gráfico M es punto medio de $\overline{AB}$.
Halle MQ



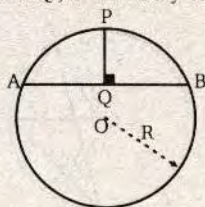
- A) 24
B) 16
C) 15
D) 12
E) 8

10. En el gráfico halle la longitud del
radio de la circunferencia



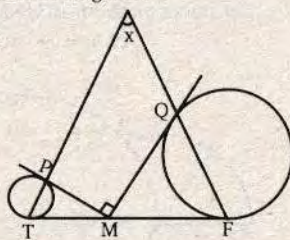
- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

11. En el gráfico, halle la longitud de la
flecha $\overline{PQ}$; si $AB=16$ y $R=10$



- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

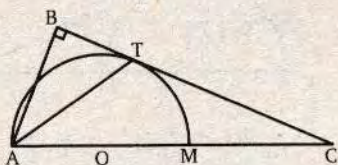
12. Calcule el valor de x si T; P; Q y F son
puntos de tangencia



- A) 30° B) 45° C) 75°
D) 60° E) 90°

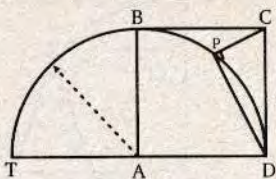
13. En la figura, T es punto de tangencia, $\overline{AM}$ es diámetro y $m\angle BAT = 2m\angle TCA$.

Halle $m\angle BAT$



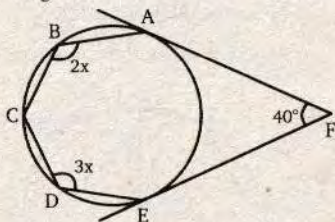
- A) 12° B) 15° C) 18°
D) 30° E) 36°

14. Según el gráfico, ABCD es un cuadrado. Calcule $m\widehat{BTP}$



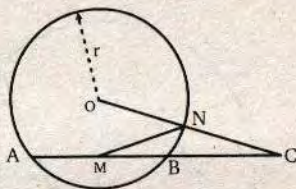
- A) 127° B) 143° C) 135°
D) 152° E) 120°

15. Calcule x si A y E son puntos de tangencia.



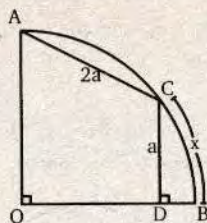
- A) 35° B) 60° C) 50°
D) 55° E) 45°

16. En la figura, O es centro, $AM=MB$, $ON=NC$ y $MN=3$. Calcule r



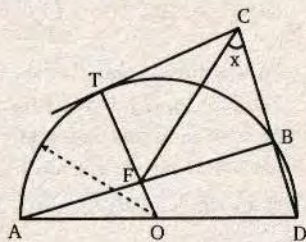
- A) 2 B) 5 C) 6
D) 3 E) 4

17. En el cuadrante AOB, calcule x



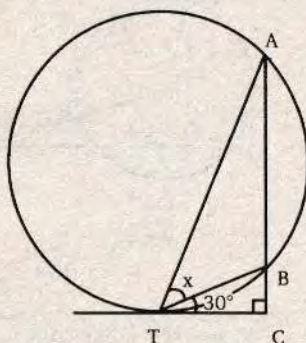
- A) 60° B) 30° C) 37°
D) 53° E) 45°

18. Del gráfico, T es punto de tangencia, $m\widehat{TB} = 80^\circ$. Calcule x



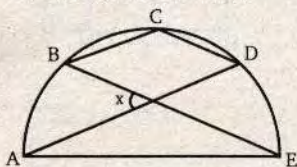
- A) 40° B) 50° C) 20°
D) 80° E) 25°

19. En la figura, T es punto de tangencia. Calcule x.



- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

20. En la figura, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$. Calcule x. ($\overline{AE}$ es diámetro)

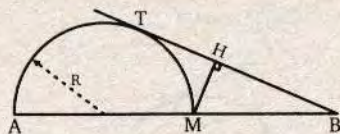


- A) 40° B) 55° C) 60°
D) 45° E) $22,5^\circ$

21. En una circunferencia se ubican los puntos A, B, C y D en forma consecutiva y en $\overline{AD}$ los puntos M y N tal que MBCN sea un cuadrado de centro O. Calcule $m\angle DBO$, Si $m\widehat{AB} = 70^\circ$

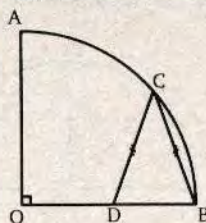
- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 14° E) 16°

22. Si T es punto de tangencia y $AT = TB$, calcule MH



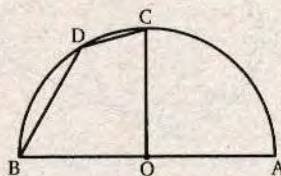
- A) $\frac{3R}{5}$ B) $\frac{R}{3}$ C) $\frac{2R}{3}$
D) $\frac{R}{2}$ E) $\frac{R}{4}$

23. En la figura AOB es un cuadrante, $OD = 3m$ y $DB = 2m$. Halle: $m\widehat{BC}$



- A) 30° B) 60° C) 37°
D) 53° E) 45°

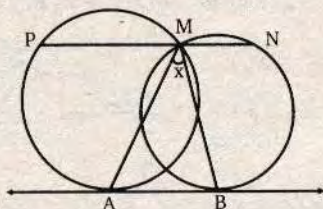
24. En la figura, O es centro del diámetro $\overline{AB}$; $3m\angle ABD = 2m\angle DCO$. Si $m\widehat{COB} = 90^\circ$. Halle $m\angle DCO$



- A) 41° B) 72° C) 80°
D) 81° E) 90°

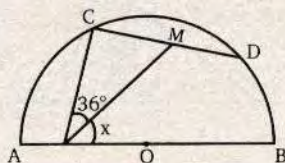
25. En la figura A y B son puntos de tangencia. Calcule el valor de x .

Si $\overline{PN} \parallel \overline{AB}$ y $m\widehat{PM} + m\widehat{MN} = 120^\circ$



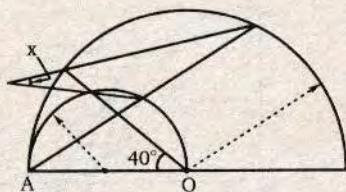
- A) 15° B) 30° C) 40°
D) 45° E) 18°

26. De la figura, calcular el valor de x si $CM = MD$ y $m\widehat{CD} = 72^\circ$



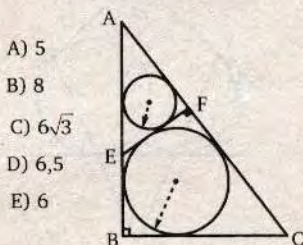
- A) 24° B) 32° C) 36°
D) 48° E) 54°

27. En el gráfico A es punto de tangencia, calcule el valor de x .



- A) 20° B) 10° C) 15°
D) 18° E) 16°

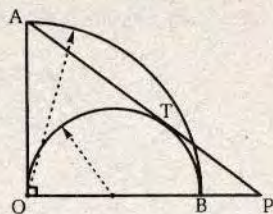
28. En la figura los radios de las circunferencias inscritas miden 2 y 4. Calcule EB.



- A) 5
B) 8
C) $6\sqrt{3}$
D) 6,5
E) 6

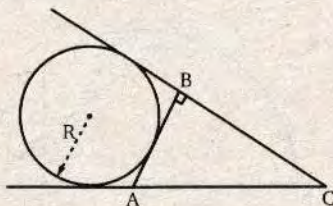
29. En el gráfico T es punto de tangencia.

Halle: $\frac{AT}{TP}$



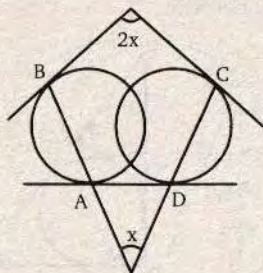
- A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

30. Halle el valor de R, si $AB=5$ y $BC=12$



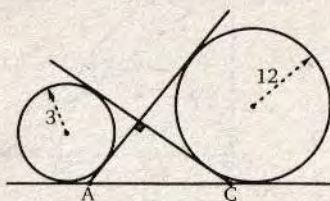
- A) 4 B) 6 C) 3
D) 7 E) 5

31. En la figura A; B; C y D son puntos de tangencia. Halle el valor de x.



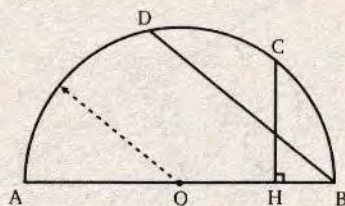
- A) 30° B) 60° C) 37°
D) 15° E) 45°

32. En el gráfico mostrado halle AC



- A) 9 B) 15 C) 12
D) 8 E) 10

33. Si $\widehat{mBC} = \widehat{mCD}$; $BD = 8$. Halle CH

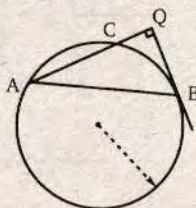


- A) 7 B) 6 C) 4
D) 3 E) 5

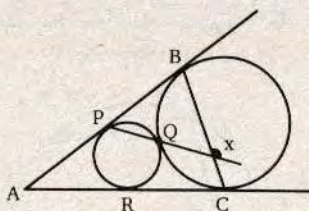
34. En la figura calcule la longitud de la flecha correspondiente a la cuerda AB, siendo B punto de tangencia.

$$AB = 6\sqrt{3} \text{ y } \widehat{mAC} = \widehat{mCB}$$

- A) 2
B) 3
C) $3\sqrt{3}$
D) 4
E) 6

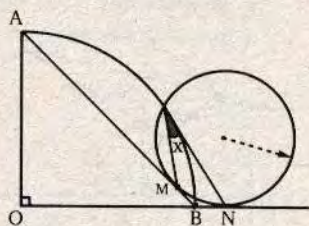


35. En la figura B; P; Q; R y C son puntos de tangencia, $\widehat{mRQ} = 100^\circ$. Calcule x



- A) 120° B) 136° C) 138°
D) 130° E) 145°

36. En la figura AOB es un cuadrante; M y N son puntos de tangencia. Calcule el valor de x.

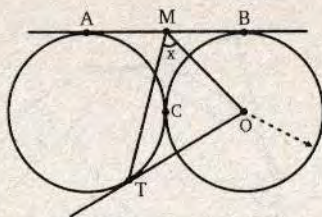


- A) 15° B) $18,5^\circ$ C) $22,5^\circ$
D) 30° E) 45°

37. En los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ de un cuadrado $ABCD$ se ubican los puntos M , N y P . Si $BN \neq NC$ y MNP es un triángulo equilátero, calcule la $m\angle BQC$. Considere Q punto medio de $\overline{MP}$.

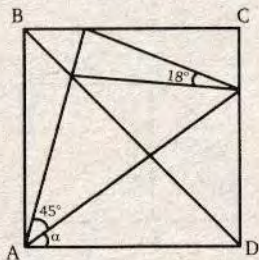
A) 75° B) 80° C) 65°
D) 60° E) 70°

38. Si T , A , B y C son puntos de tangencia, y $AM = MB$, calcule x . Considere que las circunferencias del gráfico son congruentes.



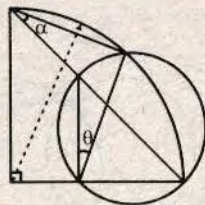
A) 45° B) 37° C) 53°
D) $71^\circ 30'$ E) 60°

39. En el gráfico mostrado, $ABCD$ es un cuadrado. Calcule α .



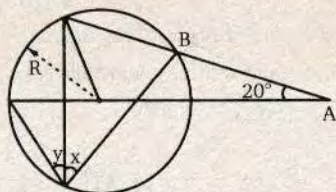
A) 19° B) 23° C) 21°
D) 25° E) 27°

40. Según el gráfico, calcule $\alpha + \theta$.



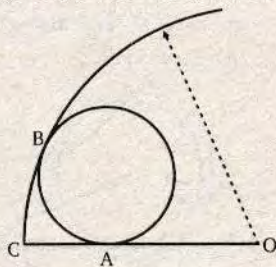
A) 60° B) 30° C) 53°
D) 45° E) 37°

41. Según el gráfico, $AB = R$, calcule $x - y$.



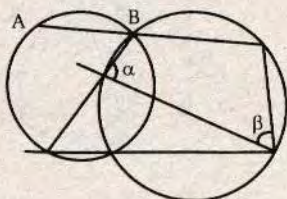
A) 28° B) 20° C) 18°
D) 25° E) 16°

42. En la figura, A y B son puntos de tangencia, si $m\widehat{CB} = 31^\circ$, halle $m\widehat{AB}$.



A) 59° B) 93° C) 161°
D) 149° E) 121°

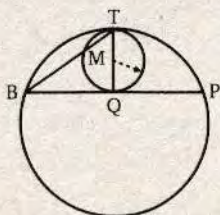
43. Del gráfico mostrado, si se sabe que $\alpha + \beta = 140^\circ$, calcule $m\widehat{AB}$



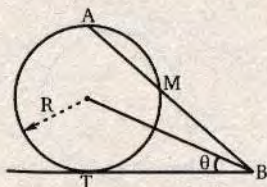
- A) 20° B) 40° C) 60°
D) 80° E) 82°

44. En el gráfico mostrado, T y Q son puntos de tangencia. Calcule $m\angle TBP$.
Si $m\widehat{TP} = 2(m\widehat{MQ})$

- A) 15°
B) 16°
C) 30°
D) 37°
E) 60°

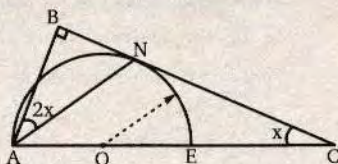


45. En el gráfico mostrado, T es punto de tangencia. Si $AM = MB = \sqrt{2}$ y $R = 1$, calcule θ



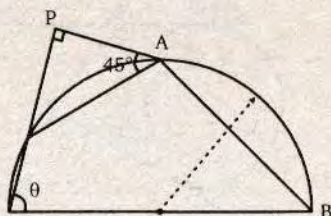
- A) $53^\circ/2$ B) 16° C) $37^\circ/2$
D) 14° E) $45^\circ/2$

46. En el gráfico, N es punto de tangencia. Calcule x.



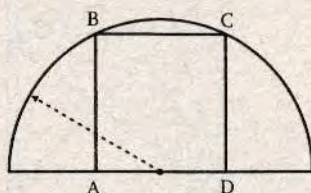
- A) 15° B) 18° C) 12°
D) 10° E) 20°

47. En el gráfico mostrado, $AB = 2(AP)$. Calcule θ .



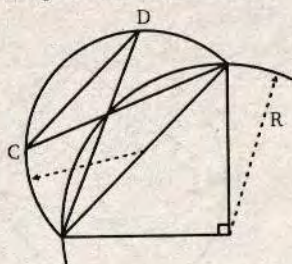
- A) 60° B) 75° C) 80°
D) 82° E) 86°

48. En el gráfico, ABCD es un cuadrado. Calcule $m\widehat{BC}$



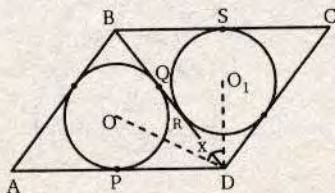
- A) 30° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 45°

49. En el gráfico, $R = 1$, calcule CD .



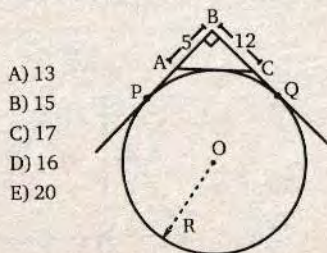
- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 3

50. En la figura, $ABCD$ es un paralelogramo, $m\angle C = 50^\circ$; O y O_1 son centros; P, Q, R, S son puntos de tangencia. Calcule x .



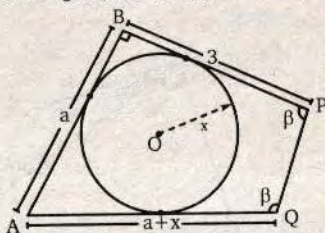
- A) 75° B) 60° C) 65°
D) 70° E) 80°

51. Si O es centro, P y Q son puntos de tangencia. Calcule R .



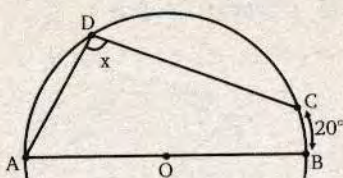
- A) 13
B) 15
C) 17
D) 16
E) 20

52. En la figura, calcule x , (O es centro).



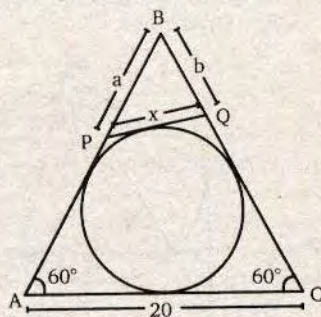
- A) 3 B) 4 C) 2
D) 5 E) 1

53. En la semicircunferencia, O es centro. Calcule x .



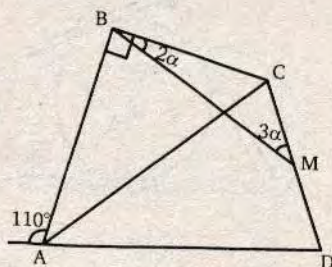
- A) 120° B) 100° C) 150°
D) 130° E) 108°

54. Si $a + b = 13$, calcule x .



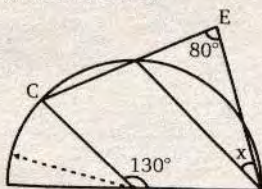
- A) 10 B) 9 C) 8
D) 7 E) 6

55. Del gráfico $AC = AD$ y $CM = MD$.
Calcule α .



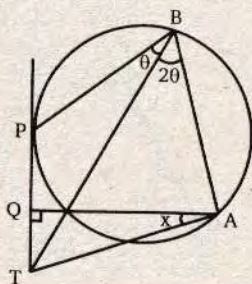
- A) 10° B) 8° C) 14°
D) 12° E) 16°

56. Del gráfico. Calcule x .



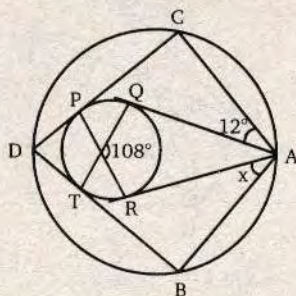
- A) 25° B) 20° C) 30°
D) 35° E) 45°

57. En el gráfico, P es punto de tangencia y $PQ = QT$. Calcule x



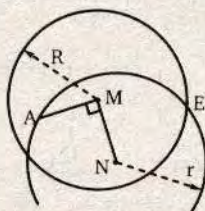
- A) $15^\circ/2$ B) 30° C) $45^\circ/2$
D) $75^\circ/2$ E) 12°

58. P, Q, T y R son puntos de tangencia.
Calcule x .



- A) 30° B) 96° C) 36°
D) 24° E) 12°

59. Si $r = \sqrt{2}$, $R = \sqrt{3}$, $MN = 1$, calcule
 $m\widehat{AE}$

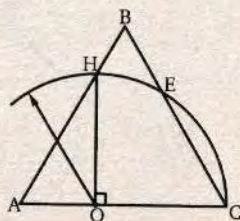


- A) 106° B) 120° C) 127°
D) 135° E) 143°

60. Si ABC es triángulo equilátero, calcule

$$\frac{AH}{BE}$$

- A) 1
B) 2
C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{5}$
E) $\frac{3}{2}$



61. Desde un punto P , exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{PQ}$ y la secante $\overline{PAB}$ que pasa por el centro de la circunferencia. Se traza $\overline{QH} \perp \overline{AB}$ tal que $QH + AH = PQ$. Entonces, $m\angle BPQ$ es:

A) 30 B) 36 C) 45
D) 60 E) 75

62. En una circunferencia, se trazan dos cuerdas perpendiculares. Por los extremos de dichas cuerdas se trazan rectas tangentes a la circunferencia. Demuestre que el cuadrilátero, que se forma al interceptarse las tangentes es inscriptible a la circunferencia.

63. En un triángulo ABC recto en B , sus lados tienen las siguientes longitudes: $AB = 5u$, $BC = 12u$ y $AC = 13u$. Entonces, la longitud (en u) del radio de la circunferencia ex-inscripta relativa al lado $\overline{AB}$ es:

A) 2 B) 2,5 C) 3,0
D) 3,5 E) 4,0

64. En un triángulo ABC recto en B , las bisectrices de los ángulos BAC y BCA interceptan a los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ en los puntos E y F respectivamente. Si la proyección de $\overline{EF}$ sobre la hipotenusa mide $5,4u$, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia inscrita al triángulo abc es:

A) 1,35 B) 1,8 C) 2,7
D) 3,6 E) 5,4

65. En un triángulo ABC , se inscribe la circunferencia siendo T el punto de tangencia en el lado $\overline{AC}$. Una recta tangente a la circunferencia, intercepta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos E y F . Desde el vértice A , se traza la perpendicular a la recta EF en el punto D , y la circunferencia inscrita al triángulo ADE es tangente al lado $\overline{AD}$ en el punto P . Si $BE = DP$ y los perímetros de los triángulos ABC y ADE miden $40u$ y $24u$ respectivamente, entonces la longitud (en u) de $\overline{TC}$ es:

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

66. Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, son tangentes interiores en el punto T . En la circunferencia mayor $\mathcal{C}_2$ se traza la cuerda MN tangente a $\mathcal{C}_1$ en el punto P . Si $m\widehat{MT} = \alpha$ y $m\widehat{TN} = \theta$, entonces $m\angle MPT$ es:

A) $90 + \frac{(\alpha - \theta)}{4}$ B) $90 + \frac{(\alpha + \theta)}{4}$
C) $90 + \frac{(\alpha - \theta)}{5}$
D) $90 + \frac{(\alpha + \theta)}{5}$ E) $60 + \frac{(\alpha + \theta)}{5}$

67. En un cuadrilátero $ABCD$, sus diagonales son perpendiculares y se interceptan en el punto O . El cuadrilátero $ABCD$ es circunscriptible a una circunferencia y las longitudes de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos AOB , BOC , COD y DOA son r_1 , r_2 , r_3 y r_4 . Demuestre la siguiente relación:
 $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$

68. En un cuadrado ABCD, se ubican los puntos **M** en $\overline{AB}$ y **N** en $\overline{BC}$. Si $AB=12u$, $MN=9u$ y $m\angle MDN=45^\circ$, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo MBN es:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

69. Dos circunferencias secantes $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, se interceptan en los puntos **T** y **S**. Desde un punto exterior **A** a dichas circunferencias, se trazan la tangente $\overline{AT}$ a la circunferencia mayor $\mathcal{C}_2$ y la tangente $\overline{AS}$ a la circunferencia menor $\mathcal{C}_1$. Además, $\overline{AT}$ intercepta a $\mathcal{C}_1$ en **B**, la prolongación de $\overline{AS}$ intercepta a $\mathcal{C}_2$ en **C** y la prolongación de la cuerda $\overline{BS}$ intercepta a $\mathcal{C}_2$ en **D**.

Si $m\widehat{CD} = 80^\circ$ y $m\widehat{DS} = 40^\circ$, entonces $m\angle TAC$ es:

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 44° E) 50°

70. Dadas tres circunferencias congruentes, tales que dos de ellas son tangentes exteriores en el punto **B** y la tercera circunferencia pasa por **B** e intercepta a las dos primeras en los puntos **A** y **C**.

Si $m\widehat{AB} = 86^\circ$, entonces $m\angle BAC$ es :

A) 42° B) 43° C) 46°
D) 47° E) 52°

71. Las circunferencias secantes $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, se interceptan en **P** y **M**. La circunferencia $\mathcal{C}_3$ pasa por **M** e intercepta a $\mathcal{C}_1$ en **Q** y a $\mathcal{C}_2$ en **N**. La prolongación de la cuerda $\overline{PQ}$ intercepta a $\mathcal{C}_2$ en **T** y a $\mathcal{C}_3$ en **F**, y la prolongación de la cuerda $\overline{NT}$ intercepta a $\mathcal{C}_3$ en el punto **E**.

Si $m\widehat{PQ} = 36$, entonces $m\widehat{EF}$ es :

A) 18 B) 24 C) 28
D) 32 E) 36

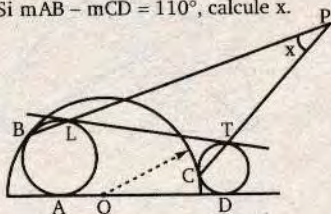
72. En un trapecio ABCD, se ubican los puntos **M** y **N** en los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ tal que los cuadriláteros ABNM y MNCD son circunscriptibles a una circunferencia. Si $AB + DC = 24 u$ y $BC + AD = 40u$, entonces la longitud de $\overline{MN}$ es:

A) 6 B) 7 C) 8
D) 12 E) 16

73. En un triángulo ABC recto en **B**, $\overline{BH}$ es la altura relativa a la hipotenusa. Las bisectrices de los ángulos ABH y HBC, interceptan a la hipotenusa en los puntos **M** y **N** respectivamente. Demuestre, que $\overline{MN}$ es el diámetro de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.

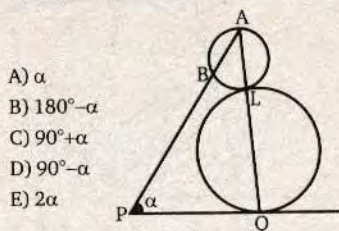
74. Según el gráfico A, B, C, D, T y L son puntos de tangencia.

Si $m\widehat{AB} - m\widehat{CD} = 110^\circ$, calcule x .



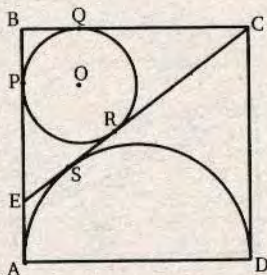
- A) 70° B) 55° C) 60°
D) 45° E) 35°

75. Según el gráfico P, T, Q y L son puntos de tangencia. Calcule $\widehat{AB}$



- A) α
B) $180^\circ - \alpha$
C) $90^\circ + \alpha$
D) $90^\circ - \alpha$
E) 2α

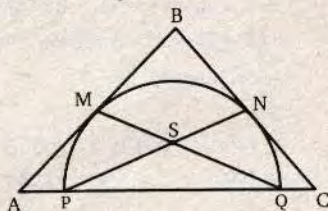
76. En la figura ABCD es un cuadrado, $\overline{AD}$ diámetro; $AB=8\text{cm}$; O centro y P, Q; R y S son puntos de tangencia. Halle OQ.



- A) 3cm B) 2cm C) 2,5cm
D) 3,5cm E) 1,5cm

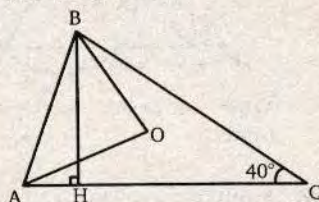
77. En la figura $AB=BC$; M y N son puntos de tangencia. $\overline{PQ}$ es diámetro; $m\angle MAC = 50^\circ$ y $m\angle NQ = 40^\circ$

Halle $m\angle PSQ$.



- A) 120° B) 130° C) 140°
D) 145° E) 160°

78. En la figura, O es circuncentro del triángulo ABC; $AC=BC$ y $OB=12\text{cm}$. Halle la distancia de O a $\overline{BH}$.



- A) 3cm B) 4cm C) 8cm
D) 10cm E) 6cm

79. Se tiene dos circunferencias tangentes interiores en T, luego se trazan las cuerdas TP y BC en la mayor, que se intersectan en N, ($\overline{BC}$ es tangente a la circunferencia menor en N).

Si $AP = PB$ y $m\angle CT = 80^\circ$

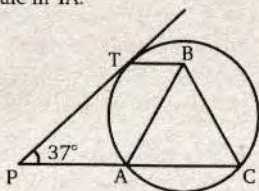
Luego se prolonga BP y TC hasta intersectarse en A. Calcule la $m\angle BAT$.

- A) 30° B) 50° C) 40°
D) 55° E) 65°

80. En una circunferencia de centro O, se ubican consecutivamente los puntos A, B, C, D, E y F, las prolongaciones de $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en L y las de $\overline{FB}$ y $\overline{DC}$ se intersecan en P; $\overline{BF} \cap \overline{AE} = \{Q\}$ y $AE = BF = CD$. Calcule $m\angle POQ$, si $m\angle PLA = 20^\circ$.

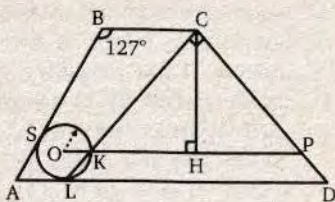
A) 140° B) 130° C) 110°
D) 100° E) 120°

81. Según el gráfico, T es punto de tangencia, $AB=BC$, $TB=6$, $\overline{TB} \parallel \overline{AC}$. Calcule $m\widehat{TA}$.



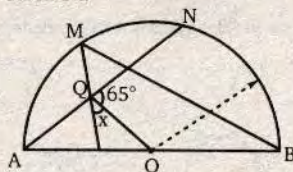
A) 83° B) 80° C) 79°
D) 78° E) 60°

82. Si ABCD es un trapecio ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$);
 $m\widehat{LK} = 2(m\angle DCH)$ y $CK = 2(AO)$;
 Calcule $\frac{CP}{PD}$ (S y L son puntos de tangencia).



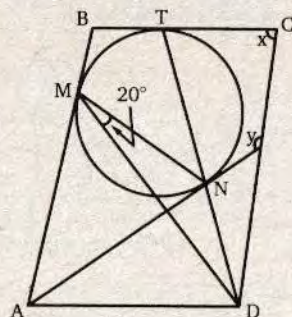
A) 3 B) $\frac{7}{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{10}$ E) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

83. Del gráfico, Si $m\widehat{MN} = m\angle MQN$.
Calcule x .



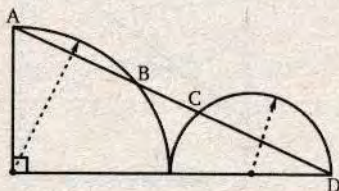
A) 25° B) 35° C) 50°
D) 65° E) 55°

84. Del gráfico M, T y N son puntos de tangencia y ABCD es un trapecio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$. Calcule $x+y$



A) 200° B) 210° C) 220°
D) 230° E) 240°

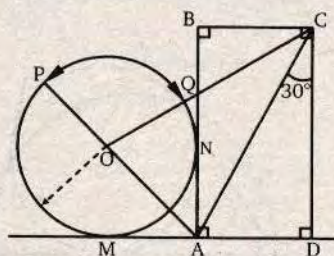
85. Según el gráfico $CD = 3(BC)$. Calcule $m\widehat{CD} - m\widehat{AB}$



A) 104° B) 106° C) 107°
D) 105° E) 108°

92. Según el gráfico, M y N son puntos de tangencia, si $OC = 2(BC)$.

Calcule $m\widehat{PQ}$

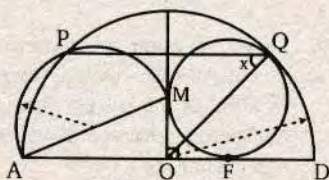


- A) 120° B) 100° C) 105°
D) 130° E) 108°

93. Se tiene un cuadrante AOB de centro O. Por un punto P de $\widehat{AB}$ y por B se traza una circunferencia tangente a $\widehat{OB}$ (La prolongación de $\widehat{AP}$ interseca a la circunferencia en Q). Si la distancia de B a $\widehat{PQ}$ y PQ están en la razón de 4 a 7. Calcule $m\widehat{AP}$

- A) 10 B) 14° C) 16°
D) 15° E) 20°

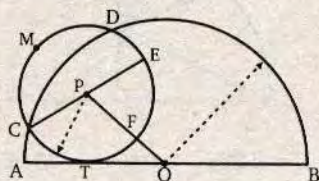
94. En la figura, M; Q y F son puntos de tangencia. Calcule x.



- A) 30° B) 60° C) 53°
D) 45° E) 37°

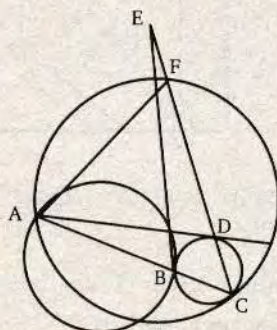
95. Según el gráfico.

La $m\widehat{CMD} = 140^\circ$, calcule la $m\widehat{EF}$
(T : punto de tangencia)



- A) 70° B) 80° C) 60°
D) 40° E) 75°

96. En el gráfico, $m\angle FAD = 40^\circ$;
 $m\angle DAC = 15^\circ$; B, C y D son puntos de tangencia, calcule $m\angle BEC$



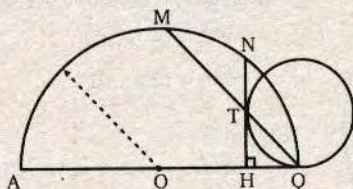
- A) 40° B) 45° C) 15°
D) 20° E) 30°

97. Se tiene una circunferencia a la cual se trazan las tangentes $\widehat{PQ}$ y $\widehat{PT}$ y la secante $\widehat{PAB}$.

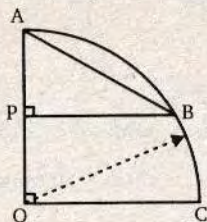
Si $m\angle QPA - m\angle APT = 40^\circ$. Calcule
 $m\widehat{BQ} + m\widehat{AT}$

- A) 200° B) 220° C) 240°
D) 225° E) 230°

98. Según el gráfico, T y Q son puntos de tangencia. Si $TH = 3(TN)$, Calcule $m\widehat{MN}$

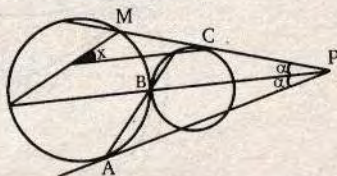


- A) 15° B) 16° C) 20°
D) 18° E) 22°
99. En la figura, calcule la distancia de C a $\overline{AB}$. Si se sabe que $AP = PO = 1$



- A) $\sqrt{3} - 1$ B) $\sqrt{2} - 1$
C) $\sqrt{6} - 2$
D) $2\sqrt{3} - 1$ E) $2 - \sqrt{3}$

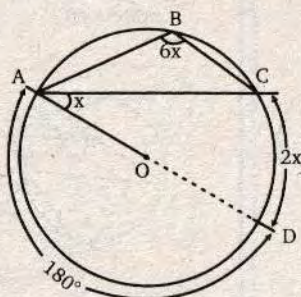
100. Del gráfico mostrado A; B y C son puntos de tangencia. Calcule x si: $m\widehat{MB} = 60^\circ$



- A) 40° B) 20° C) 30°
D) 25° E) 15°

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución 1:



Piden : "x"

Trazamos el diámetro $\overline{AD}$, luego:

$$m\widehat{CD} = 2x \dots (I)$$

$$m\widehat{AD} = 180 \dots (II)$$

También :

$$m\widehat{ADC} = m\widehat{CD} + m\widehat{AD} \dots (III)$$

Reemplazando: (I) y (II) en (III)

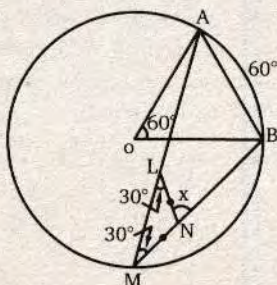
$$12x = 2x + 180$$

$$10x = 180$$

$$x = 18^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 2:



Piden : "x"

Del dato : $m\widehat{AB} = 60^\circ$ (Ángulo Central)

Luego : $m\angle AMB = 30^\circ$ (Ángulo Inscrito)

También :

$\triangle LNM$: Isósceles

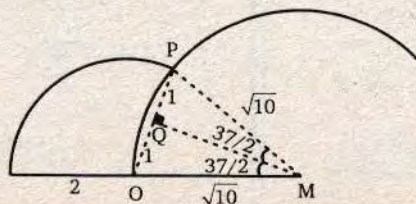
Luego:

$$x = 30^\circ + 30^\circ \text{ (Ángulo Exterior)}$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 3:



Piden: $m\widehat{OP}$

Trazamos el radio $\overline{PM}$

Luego: $\triangle POM$ es Isósceles

Trazamos $\overline{MQ} \perp \overline{PO}$

$$\rightarrow PQ = OQ = 1$$

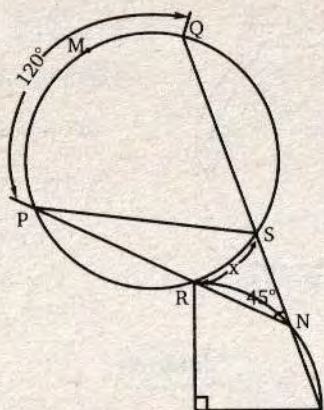
Se observa:

 $\triangle PQM$ (Notable $37^\circ/2$ y $143^\circ/2$)

$$m\angle PMQ = m\angle MQO = \frac{37^\circ}{2}$$

Entonces :

$$m\widehat{PO} = 37^\circ \quad (\text{Ángulo Central})$$

Rpta.: E**Resolución 4:**

$$\text{Piden : } m\widehat{RS} = x$$

$$\text{Dato : } m\widehat{PMQ} = 120^\circ$$

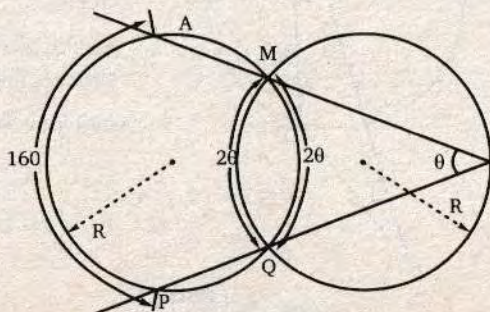
Del gráfico:

$$m\angle RNS = 45^\circ \quad (\text{Ángulo ex-inscrito})$$

Luego:

$$45^\circ = \frac{120^\circ - x}{2} \quad (\text{Teorema})$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: A**Resolución 5:**

$$\text{Piden: } \theta$$

$$\text{dato : } m\widehat{AMP} = 200$$

$$\Rightarrow m\widehat{AP} = 160^\circ$$

Luego; como las circunferencias son congruentes

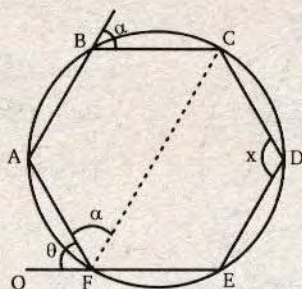
$$\rightarrow m\widehat{MQ} = 2\theta \quad (\text{por las dos circunferencias})$$

Finalmente : $\theta = \frac{160 - 2\theta}{2} \quad (\text{Angulo exterior})$

$$\therefore \theta = 40^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 6:



Piden: "x"

Trazamos $\overline{CF}$, luego :

$\triangle ABCF$ y $\triangle FCDE$

son cuadrilátero inscritos

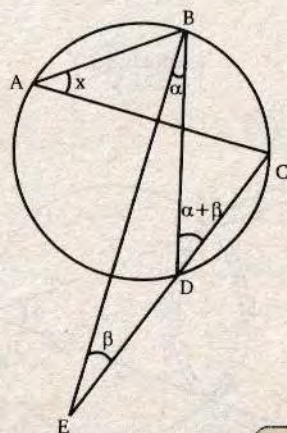
$$\rightarrow m\angle PBC = m\angle AFC \quad (\text{Teorema})$$

$$m\angle CDE = m\angle CFQ \quad (\text{Teorema})$$

$$\therefore x = \alpha + \theta$$

Rpta.: A

Resolución 7:



Piden: "x"

$$\text{Dato: } \alpha + \beta = 40^\circ$$

Se observa:

$$m\angle BDC = \alpha + \beta \quad (\text{Teorema Ángulo exterior})$$

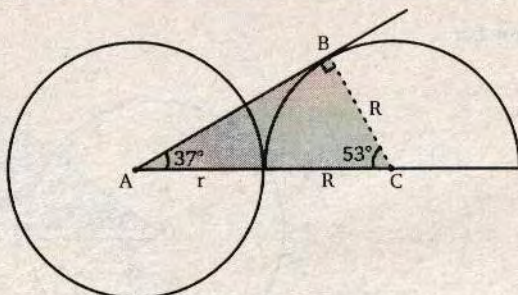
Luego; en $\triangle ABCD$

$$x = \alpha + \beta \quad (\text{Teorema})$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 8:



Piden:

$$\frac{R}{r}$$

 $\triangle ABC$ (Notable de 37° y 53°)

$$\Rightarrow \frac{r+R}{5} = \frac{R}{3}$$

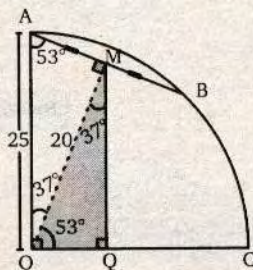
$$3r + 3R = 5R$$

$$3r = 2R$$

$$\therefore \frac{R}{r} = \frac{3}{2}$$

Rpta.: E

Resolución 9:

Trazamos $\overline{OM}$; como $AM = MB$

$$\Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AB}$$

 $\triangle OAM$ (Notable de 37° y 53°)

$$OA = 25 \Rightarrow OM = 20$$

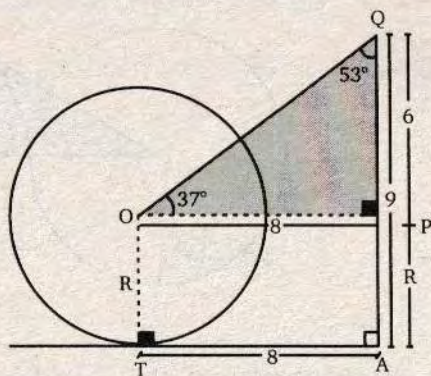
 $\triangle OMQ$ (Notable de 37° y 53°)

$$OM = 20$$

$$\therefore MQ = 16$$

Rpta.: B

Resolución 10:



Piden: R

Trazamos $\overline{OT}$ (T: punto de tangencia)

$$\Rightarrow \overline{OT} \perp \overline{TA}$$

$\Rightarrow$ Se tiene el rectángulo APOT

$$\Rightarrow OP = 8$$

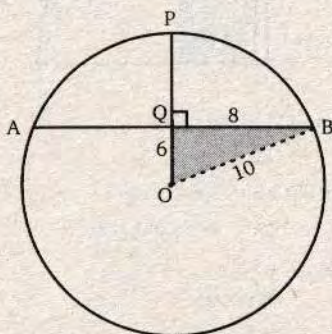
$\triangle OPQ$ (Notable de 37° y 53°)

$$PQ = 6$$

$$\therefore R = 3$$

Rpta.: B

Resolución 11:



Como $\overline{PQ}$ es flecha

$$\Rightarrow AQ = QB = 8$$

$\triangle OQB$ (Notable de 37° y 53°)

$$\Rightarrow OQ = 6$$

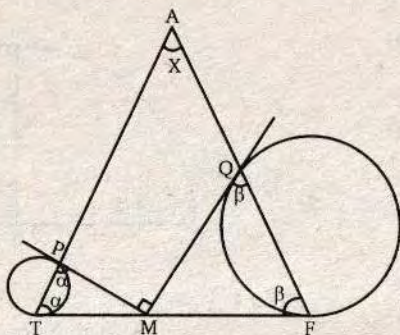
Luego:

$$R = OP = \overbrace{OQ}^6 + PQ = 10$$

$$\therefore PQ = 4$$

Rpta.: D

Resolución 12:



Aplicando el teorema:

Completamos medidas angulares $\triangle PAQM$: $x + 90 = \alpha + \beta$

$$\triangle ATF : x + \alpha + \beta = 180$$

Sumando miembro a miembro:

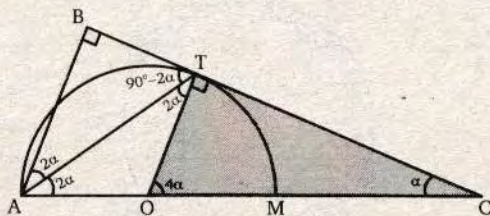
$$2x + 90 + \alpha + \beta = \alpha + \beta + 180$$

$$2x = 90$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 13:

Sea O centro de la $\odot$ y $m\angle BCA = \alpha$; por dato $m\angle BAT = 2\alpha$ $\triangle ABT$:

$$m\angle BTA = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow m\angle ATO = 2\alpha \text{ (Pues } \overline{OT} \perp \overline{BC})$$

 $\triangle ATO$ (Isósceles)

$$\Rightarrow m\angle TOC = 2\alpha + 2\alpha = 4\alpha$$

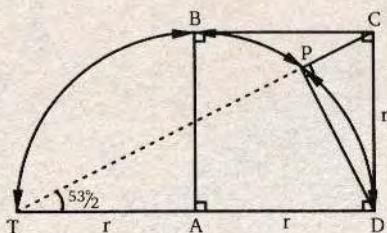
 $\triangle OTC$:

$$4\alpha + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 18^\circ$$

$$\therefore m\angle BAT = 36^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 14:



como $\overline{TP} \perp \overline{PD}$ (Teorema)

$\Rightarrow T, P$ y C son colineales

$\triangle TCD$ (Notable de $\frac{53^\circ}{2}$)

$$\Rightarrow m\widehat{PD} = 53^\circ$$

$$\Rightarrow m\widehat{BP} = 37^\circ$$

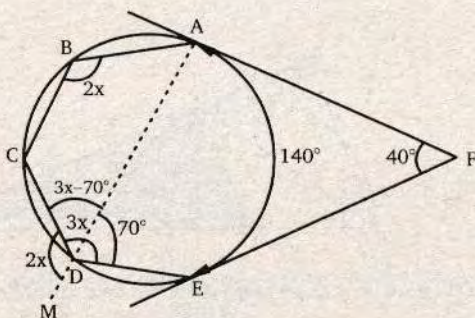
Luego:

$$m\widehat{TBP} = 90^\circ + 37^\circ$$

$$\therefore m\widehat{TBP} = 127^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 15:



Se traza $\overline{AD}$ entonces

$\triangle ABCD$ es inscrito

$$m\angle CBA = m\angle CDM$$

Luego:

$$m\widehat{AE} + 40^\circ = 180^\circ$$

$$m\widehat{AE} = 140^\circ$$

Ahora:

$$m\angle CDA = 3x - 70^\circ$$

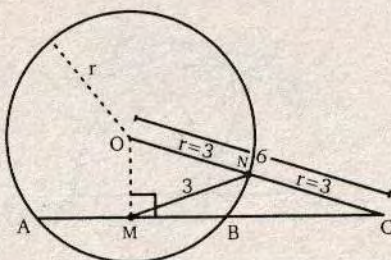
Como $\triangle ABCD$ es inscrito

$$2x + 3x - 70^\circ = 180^\circ$$

$$x = 50^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 16:



Se traza $\overline{OM}$ y como $AM = MB$

$\Rightarrow$ Por teorema : $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

Ahora : En $\triangle OMC$: $\overline{MN}$: Mediana

Entonces: $OC = 2(3)$

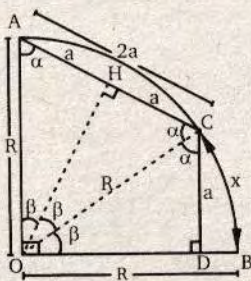
$$OC = 6$$

Ahora : $ON = NC = 3$

$$\therefore r = 3$$

Rpta.: D

Resolución 17:



Se traza $\overline{OC}$: Radio (R) y $\overline{OH} \perp \overline{AC} \Rightarrow AH = HC = a$

$$\triangle OHC \cong \triangle CDO$$

$$\rightarrow m\angle AOH = m\angle HOC = m\angle COB = \beta$$

Luego: En el vértice O

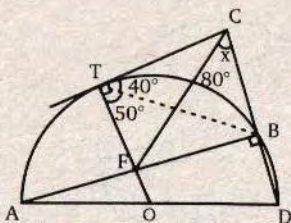
$$3\beta = 90^\circ \rightarrow \beta = 30^\circ$$

Como : $\angle COB$ es central

$$x = 30^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 18:



En el gráfico :

$$m\angle ABC = m\angle OTC = 90^\circ$$

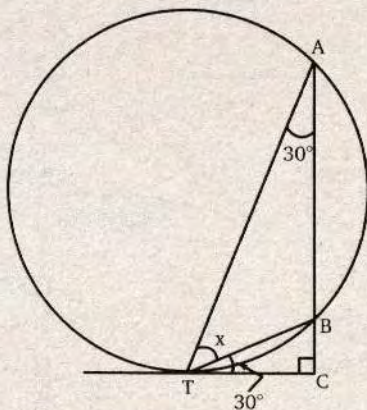
Entonces :

$\triangle$ FTCB es inscriptible

$$\therefore x = 50^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 19:



$$m \angle BTC = 30^\circ \text{ (}\angle \text{Semi-inscrito)}$$

Entonces : $m\widehat{BT} = 60^\circ \rightarrow m\angle TAB = \frac{60}{2} (\angle \text{inscrito})$

$$m \angle TAB = 30^\circ$$

Ahora: Δ ACT : Notable de 30° y 60°

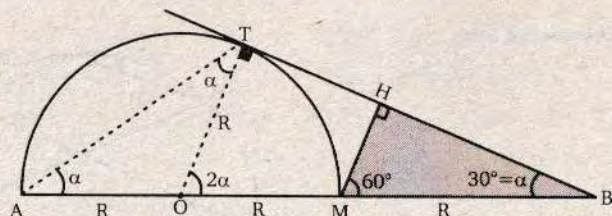
$$\Rightarrow m_{ATC} = 60^\circ$$

Luego: $x + 30^\circ = 60^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 22:



$\triangle ATB$: Isósceles

$$m\angle TAB = m\angle TBA = \alpha$$

$$m\angle TOB = 2\alpha$$

En el $\triangle OTB$: $2\alpha + \alpha = 90$

$$\alpha = 30$$

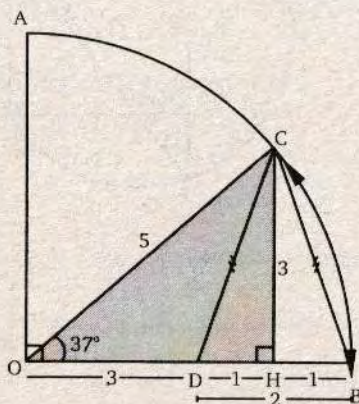
$$\Rightarrow OB = 2R$$

En el $\triangle MHB$ (Notable de 30° y 60°)

$$\therefore MH = \frac{R}{2}$$

Rpta.: D

Resolución 23:



Según los datos :

$$OB = \text{Radio} = 3 + 2 = 5$$

Trazamos la altura $\overline{CH}$

Del $\triangle DCB$ (Isósceles)

$$\Rightarrow DH = HB = 1$$

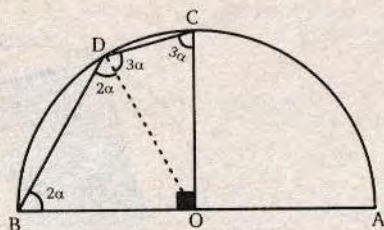
$\triangle OCH$ (Notable de lados 5, 4 y 3)

Notable de 37° y 53°

$$\therefore m\angle CB = 37^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 24:



Según los datos se concluye que OCB es un cuadrante

Trazando $OD = OB = OC = \text{Radio}$ completamos ángulos

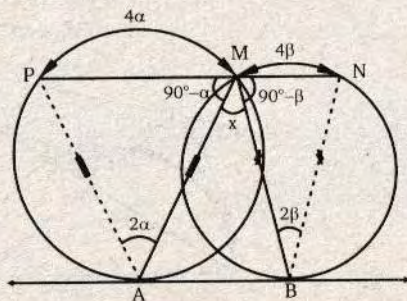
Por Propiedad : $m\angle BDC = 5\alpha = 135^\circ$
 $\alpha = 27^\circ$

Piden $m\angle DCO = 3\alpha = 3(27^\circ)$

$\therefore m\angle DCO = 81^\circ$

Rpta.: D

Resolución 25:



Como $\overline{PN} \parallel \overline{AB}$:

$$m\widehat{PA} = m\widehat{AM} \wedge m\widehat{MB} = m\widehat{BN}$$

$$\Rightarrow PA = AM \wedge MB = BN$$

$\triangle PAM$ (Isósceles) :

$$\text{Si } m\angle A = 2\alpha \Rightarrow m\angle AMP = 90^\circ - \alpha$$

$\triangle MBN$ (Isósceles) :

$$\text{Si } m\angle B = 2\beta \Rightarrow m\angle GMN = 90^\circ - \alpha$$

Luego en "M"

$$90^\circ - \alpha + x + 90^\circ - \beta = 180$$

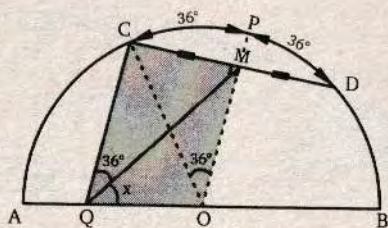
$$x = \alpha + \beta \dots\dots (I)$$

Dato : $4\alpha + 4\beta = 120^\circ$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 30^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 26:

Trazamos el radio $\overline{OP}$ ($M \in \overline{OP}$)

Como $CM = MD \Rightarrow m\widehat{CP} = m\widehat{PD} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$

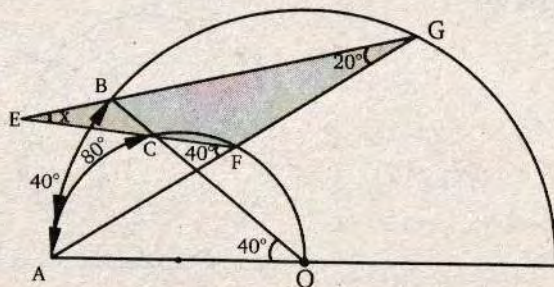
$$\Rightarrow m\angle COM = 36^\circ$$

$\triangle$ OQCM : Inscriptible

$$\Rightarrow (x + 36^\circ) + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 54^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 27:
$$\angle \text{Inscrito en O} : m\widehat{AC} = 80^\circ$$
 $\angle \text{Central en O} : m\widehat{AB} = 40^\circ$

Propiedad (Rebote) :

$$m\angle CFA = 40^\circ$$

$\triangle$ Inscrito en G : $m\angle BGF = 20^\circ$

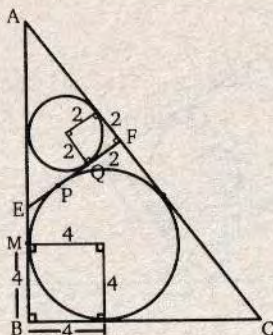
 ΔFEG (Ángulo exterior) :

$$x + 20^\circ = 40^\circ$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 28:



Por Teorema:

$$EP = QF = 2$$

También :

$$EP = EM = 2$$

Luego :

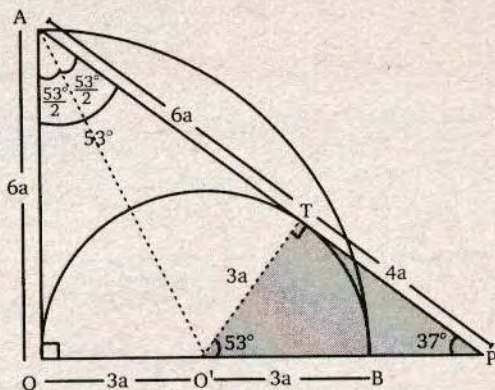
$$EB = EM + MB$$

$$EB = 2 + 4$$

$$\therefore EB = 6$$

Rpta.: E

Resolución 29:


 $\triangle AOO'$ (Notable de $\frac{53^\circ}{2}$)

$$OO' = 3a \Rightarrow OA = 6a$$

$$OA = AT = 6a \dots\dots\dots (I)$$

 $\triangle O'TP$ (Notable de 53° y 37°)

$$OT = 3a \Rightarrow TP = 4a \dots\dots\dots (II)$$

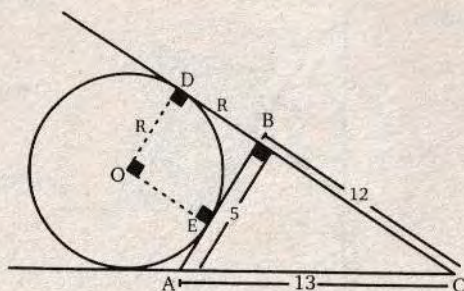
De (I) y (II) :

$$\frac{AT}{TP} = \frac{6a}{4a}$$

$$\therefore \frac{AT}{TP} = \frac{3}{2}$$

Rpta.: B

Resolución 30:



$\triangle ABC$ (De lados 5; 12 y 13) : $AC = 13$

Por Teorema: $CD = \text{Semiperímetro } (\triangle ABC)$

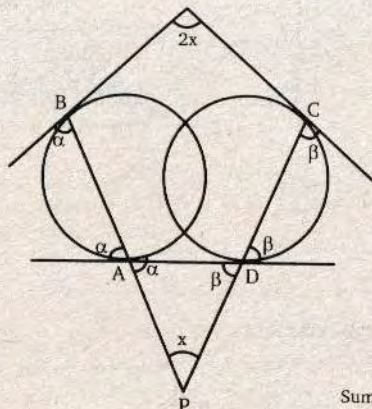
$$\Rightarrow R + 12 = \frac{5 + 12 + 13}{2}$$

$$R + 12 = 15$$

$$\therefore R = 3$$

Rpta.: C

Resolución 31:



Completamos medidas angulares con el teorema:



Y con ángulos opuestos por el vértice en A y D

$$\triangle APD : x + \alpha + \beta = 180$$

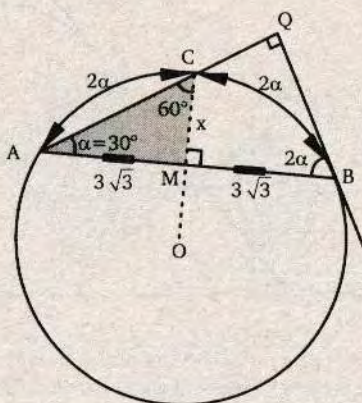
$$\triangle : x + 2x = \alpha + \beta$$

$$\text{Sumando miembro a miembro} \quad 4x + \alpha + \beta = \alpha + \beta + 180$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 34:



Como $m\widehat{AC} = m\widehat{CB} = 2\alpha$

$$\Rightarrow \overline{OC} \perp \overline{AB} \wedge AM = MB$$

Además por propiedad
(ángulo inscrito) :

$$m \angle CAB = \alpha$$

Teorema (ángulo ex-inscrito) :

$$m_{\text{QBA}} = 2\alpha$$

$$\triangle AQB : \alpha + 2\alpha = 90^\circ$$

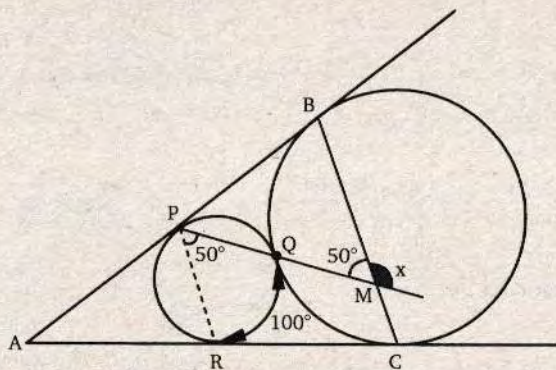
$$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$\triangle ACM$: (Notable de 30° y 60°) :

$$\therefore x = 3$$

Rpta.: B

Resolución 35:



Por teorema:

$$\overline{PR} \parallel \overline{BC}$$

Por ángulo inscrito :

$$m\angle RPQ = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

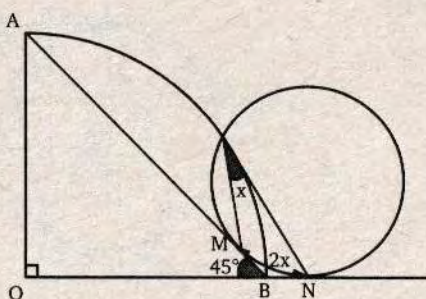
Por ángulos alternos internos

$$m\angle BMP = m\angle MPR = 50^\circ$$

$$\therefore x = 130^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 36:



$$m\angle OBA = 45^\circ$$

$$m\angle NBM = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Por teorema (ángulo exterior)

$$m\widehat{MN} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

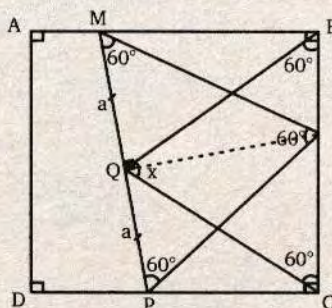
Teorema (ángulo inscrito)

$$2x = 45^\circ$$

$$\therefore x = 22,5^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 37:



Piden "x"

$$MQ = QP = a$$

Se observa

$\overline{QN} \perp \overline{MP}$ (Teorema)

Luego :

$\triangle MBNQ$ y $\triangle QNCP$ (inscribibles)

$$m\angle QMN = m\angle QBN = 60^\circ$$

(teorema de rebote)

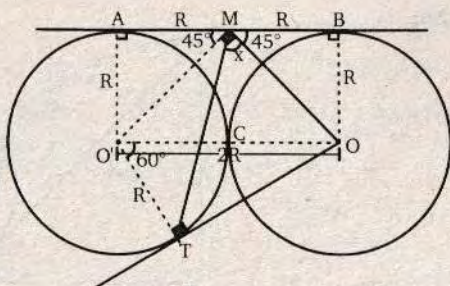
$$m\angle QPN = m\angle QCN = 60^\circ$$

(teorema de rebote)

Entonces: $\triangle QBC$: equilátero

$$\therefore x = 60^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 38:

Piden : "x"

Se observa : $AB = O'O = 2R$

También :

$$\triangle O'AM \cong \triangle OBM \text{ (L - A - L)}$$

Entonces : $m \angle O'MO = 90^\circ$

También :

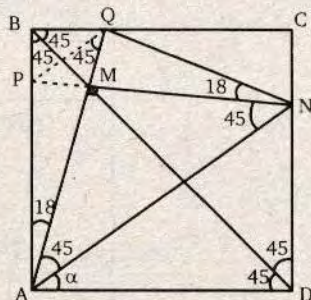
OTO' (Notable 30° y 60°)

Entonces: $\Delta TO'MO$: inscriptible

$$m \angle T + m \angle M = 180^\circ (\text{teorema de rebote})$$
$$\therefore x = 60^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 39:



Piden : " α "

Se observa : $\triangle AMND$: inscriptible

→ $m\angle ANM = 45^\circ$
(Teorema rebote)

También : $\triangle$ PBQM: inscriptible

→ $m\angle PQM = 45^\circ$
(Teorema rebote)

Además : $\triangle APQN$: inscriptible

$$\rightarrow m\angle POM = m\angle PNA$$

Entonces: $\triangle APQN$: inscriptible

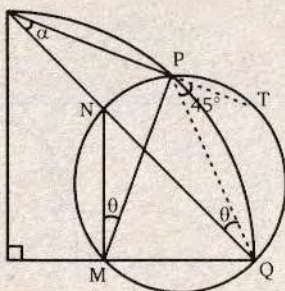
$$\rightarrow m\angle QNP = m\angle PAQ = 18^\circ$$

(Teorema rebote)

$$\alpha + 45 + 18 = 90$$
$$\therefore \alpha = 27^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 40:

Piden : $\alpha + \beta$

Se observa :

 $m\angle NMP = m\angle NQP = \theta$
 (teorema de rebote)

También :

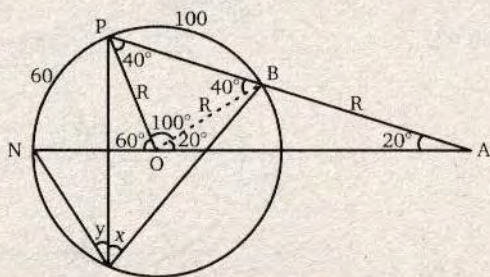
$$m\angle QPT = 45^\circ$$

(teorema)

$$\therefore \alpha + \beta = 45^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 41:

Piden : $x - y$ Trazamos $\overline{OB}$

Luego :

 $\triangle POB$ y $\triangle OBA$: Isósceles

Se observa :

$$x = \frac{100^\circ}{2} \quad (\text{Ángulo inscrito})$$

$$x = 50^\circ$$

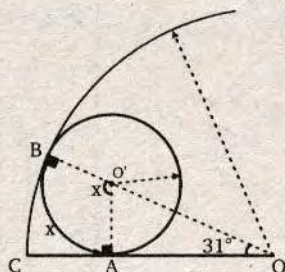
$$y = \frac{60^\circ}{2} \quad (\text{Ángulo inscrito})$$

$$y = 30^\circ$$

$$\therefore x - y = 20^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 42:



$B, O' \text{ y } O$: son colineales

(Teorema)

Del dato :

$m\angle BOC = 31^\circ$ (Ángulo Central)

Luego :

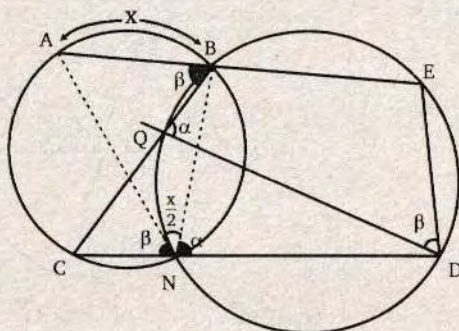
$m\angle BO'A = x$ (Ángulo Central)

Entonces: $x = 31^\circ + 90^\circ$

$\therefore x = 121^\circ$

Rpta.: E

Resolución 43:



Piden : $m\widehat{AB} = x$

Se observa :

$\triangle QBED$: Cuadrilátero Inscrito

$\rightarrow m\angle ABQ = m\angle QDE = \beta$

Luego por el teorema del rebote:

$m\angle CNA = m\angle ABC = \beta$

También :

$m\angle BND = m\angle BQD = \alpha$

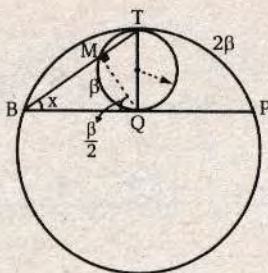
Entonces: En N

$$\frac{\alpha + \beta}{140^\circ} + \frac{x}{2} = 180$$

$\therefore x = 80$

Rpta.: D

Resolución 44:



Piden : $m\angle MTBP = x$

Del dato : $m\widehat{MQ} = \beta$

$$m\widehat{TP} = 2\beta$$

Trazamos $\overline{MQ}$

$\rightarrow m\angle QMT = 90^\circ$ (Teorema)

Luego :

$$m\angle MQB = \frac{\beta}{2} \text{ (Ángulo Semi-inscrito)}$$

También :

$$x = \beta \text{ (Ángulo inscrito)}$$

Entonces: $\triangle BMQ$

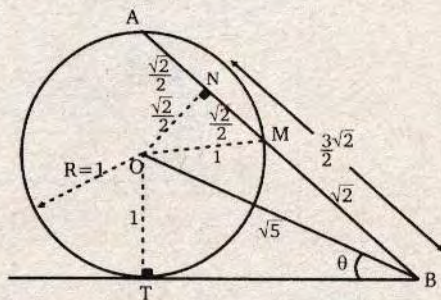
$$x + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

$$x + \frac{x}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 45:



Piden : θ

Trazamos $\overline{ON} \perp \overline{AM}$

$$\rightarrow AN = NM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se observa:

$\triangle ONM$: Notable (45° y 45°)

$$\rightarrow ON = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

También: $\triangle ONB$ (Notable $\frac{37^\circ}{2}$ y $\frac{143^\circ}{2}$)

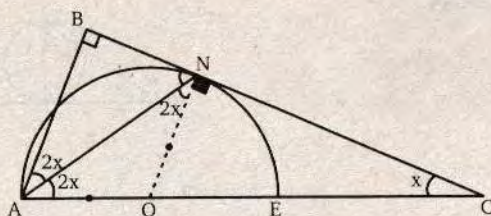
$$\rightarrow OB = \sqrt{5}$$

Luego: $\triangle OTB$ (Notable $\frac{53^\circ}{2}$ y $\frac{127^\circ}{2}$)

$$\therefore \theta = \frac{53^\circ}{2}$$

Rpta.: A

Resolución 46:



Piden : "x"

Trazamos $\overline{ON} \rightarrow m\angle ONC = 90^\circ$
(teorema)

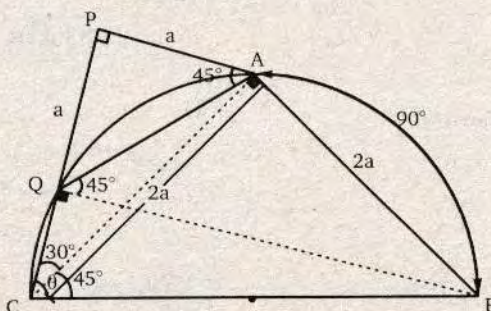
Luego:
 $m\angle BAN = m\angle ANO = 2x$
(alternos internos)

También : $\triangle AON$: Isósceles
 $\rightarrow m\angle OAN = 2x$

Entonces en $\triangle ABC$
 $2x + 2x + x = 90$
 $\therefore x = 18$

Rpta.: B

Resolución 47:



Piden : "θ"

Del dato :
 $AP = a \rightarrow AB = 2a$

Trazamos $\overline{QB} \rightarrow m\angle CQB = 90$
(teorema)

Luego:
 $m\angle PAQ = m\angle AQB = 45^\circ$
(alternos internos)

$\rightarrow m\widehat{AB} = 90^\circ$ y $m\widehat{CA} = 90^\circ$

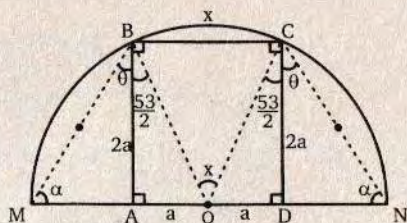
Entonces :
 $\triangle CAB$ (Notable 45 y 45)

También :
 $\triangle APC$ (Notable 30 y 60)

Entonces:
 $\theta = 30 + 45$
 $\therefore \theta = 75^\circ$

Rpta.: B

Resolución 48:

Piden : $m\widehat{BC} = x$

Se observa :

 $\widehat{BC} // \widehat{MN} \rightarrow m\widehat{MB} = m\widehat{CN}$

Luego :

$$MB = CN$$

También : $\triangle MAB \cong \triangle NCD$
(A - L - A)

$$\rightarrow MA = DN$$

Entonces :

$$AO = OD = a$$

Luego :

 $\triangle BAO$ y $\triangle CDO$ (Notable $\frac{53^\circ}{2}$ y $\frac{127^\circ}{2}$)

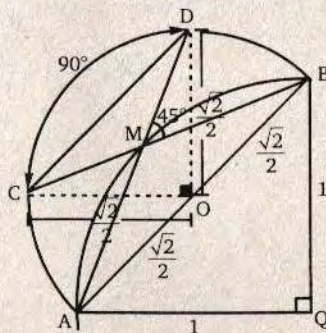
Entonces:

$$x = \frac{53^\circ}{2} + \frac{53^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 53^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 49:



Piden : "CD"

Del gráfico : $AO = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Luego :

 $m\angle DMB = 45^\circ$ (teorema)

$$\rightarrow \frac{m\widehat{AC} + m\widehat{DB}}{2} = 45^\circ \text{ (Ángulo Interior)}$$

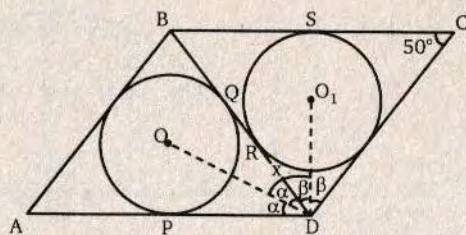
$$m\widehat{AC} + m\widehat{DB} = 90^\circ$$

Entonces : $m\widehat{CD} = 90^\circ$ $\triangle COD$ (Notable 45 y 45)

$$\therefore CD = 1$$

Rpta.: A

Resolución 50:



Del gráfico :

$$x = \alpha + \beta$$

Como ABCD es un paralelogramo :

$$50^\circ + m\angle ADC = 180^\circ$$

$$m\angle ADC = 130^\circ$$

Ahora :

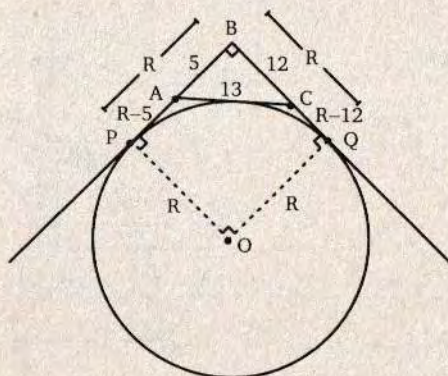
$$2\alpha + 2\beta = 130^\circ$$

$$\alpha + \beta = 65$$

$$\therefore x = 65^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 51:



Se trazan los radios $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$

$$\text{Ahora : } OQ = PB = R$$

$$BQ = OP = R$$

Por lo tanto :

$$AP = R - 5$$

$$CQ = R - 12$$

$$\text{Luego : } AP = AM = R - 5$$

$$CQ = CM = R - 12$$

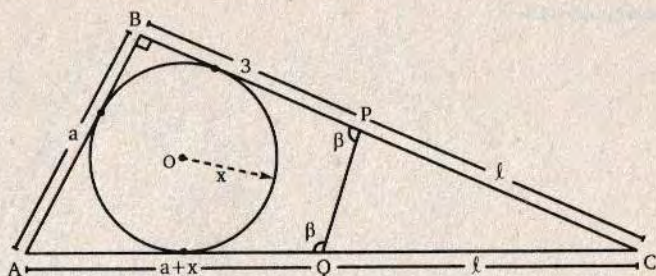
Entonces:

$$R - 5 + R - 12 = 13$$

$$R = 15$$

Rpta.: B

Resolución 52:



Se prolonga $\overline{BP}$ y $\overline{AQ}$ hasta "C"

Entonces :

$\triangle PCQ$ es isósceles

$PC = QC = l$

Ahora :

En $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet

$$a + 3 + l = a + x + l + 2x$$

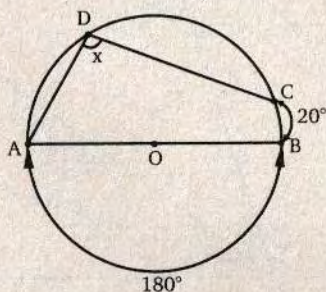
$$3 = 3x$$

$$x = 1$$

Rpta.: E

Resolución 53:

Se completa la circunferencia



Como: $\overline{AB}$ es diámetro

$$m\widehat{AB} = 180^\circ$$

Ahora:

$$m\widehat{ABC} = 200^\circ$$

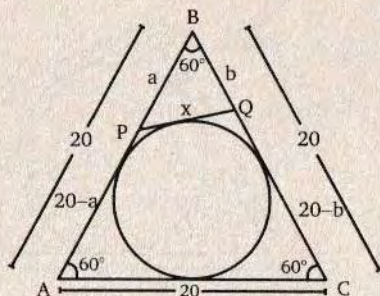
Luego:

$$x = \frac{200^\circ}{2} \quad (\angle \text{ inscrito})$$

$$\therefore x = 100^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 54:



Como $\triangle ABC$ es equilátero

$$AC = AB = BC = 20$$

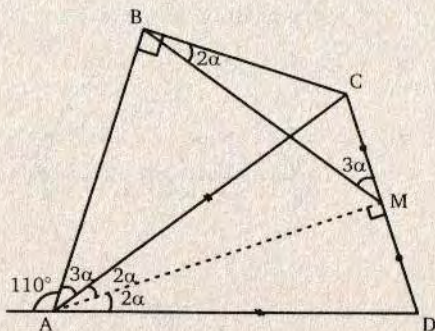
Ahora : Por el teorema de Pitot en $\triangle APQC$:

$$20 - a + 20 - b = x + 20$$

$$x = 7$$

Rpta.: D

Resolución 55:



Se traza $\overline{AM}$

$\triangle CAD$ (isósceles) :

$\overline{AM}$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{mediana} \\ \text{altura y} \\ \text{bisectriz} \end{array} \right.$

$\triangle ABCM$ (Inscriptible):

$$m\angle BAC = m\angle BMC = 3\alpha \text{ y}$$

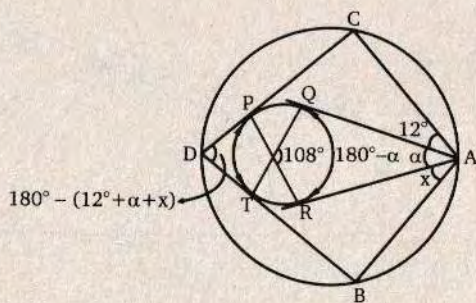
$$m\angle CAM = m\angle MBC = 2\alpha$$

Luego en el punto A:

$$110^\circ + 7\alpha = 180^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 58:

Del gráfico :

$$180^\circ - (12^\circ + \alpha + x) + m\widehat{PT} = 180^\circ$$

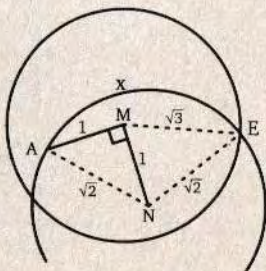
$$m\widehat{PT} = 12^\circ + \alpha + x$$

Por $\angle$ interior :

$$108^\circ = \frac{108^\circ - \alpha + 12^\circ + \alpha + x}{2}$$

$$\therefore x = 96^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 59:

Piden : $m\widehat{AE} = x$

Se observa :

$\triangle AMN$: Notable (45° y 45°)

$$\rightarrow m\angle ANM = 45^\circ$$

También : Δ MNE

$$\sqrt{2}^2 + 1^2 = \sqrt{3}^2$$

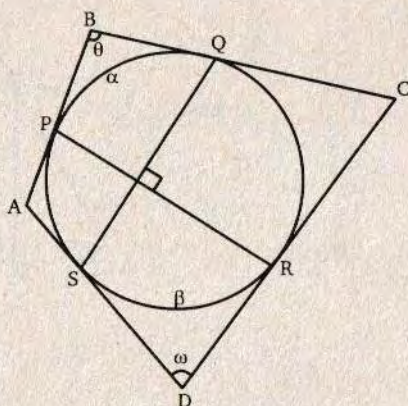
(cumple el teorema de Pitágoras)

$$\rightarrow m\angle MNE = 90^\circ$$

$$\therefore m\widehat{AE} = m\angle ANM + m\angle MNE = 135^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 62:



Por demostrar:

$\triangle ABCD$: Inscriptible

P, Q, R y S : Puntos de Tangencia

Sea: $m\widehat{PQ} = \alpha$

$m\widehat{SR} = \beta$

Luego: $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ$ (Ángulo interior)

$\rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$ (I)

También : Sea

$m\angle PBQ = \theta$

$m\angle SDR = \omega$

Luego :

$\alpha + \theta = 180^\circ$ (Teorema)

$\beta + \omega = 180^\circ$ (Teorema)

$\alpha + \theta + \beta + \omega = 360^\circ$ (II)

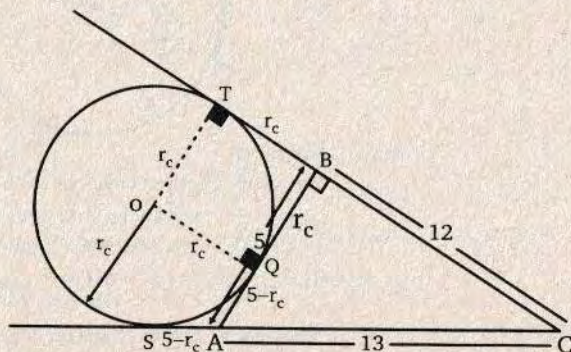
(I) en (II)

$\rightarrow \alpha + \omega = 180^\circ$

$\therefore \triangle ABCD$ es Inscriptible

Rpta.:

Resolución 63:



Piden : " r_c "

Del gráfico $TB = r_c$

También : $TB = BQ$ (Teorema)

Luego : $QA = 5 - r_c$

Además $QA = SA$ (Teorema)

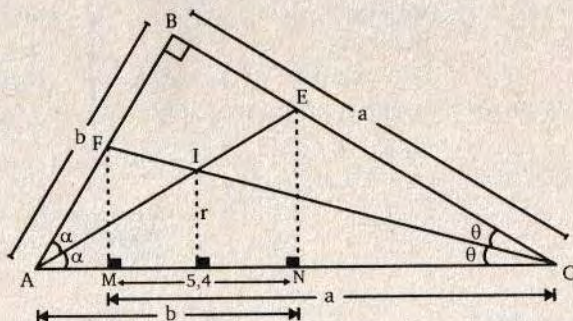
Finalmente: $TC = SC$ (Teorema)

$$r_c + 12 = 5 - r_c + 13$$

$$\therefore r_c = 3$$

Rpta.: C

Resolución 64:



Del gráfico : I es incentro

Piden "r"

Luego:

$BC = MC = a$ (Teorema de la bisectriz)

$AB = AN = b$ (Teorema de la bisectriz)

También: $AC = a + b - 5,4$

Entonces:

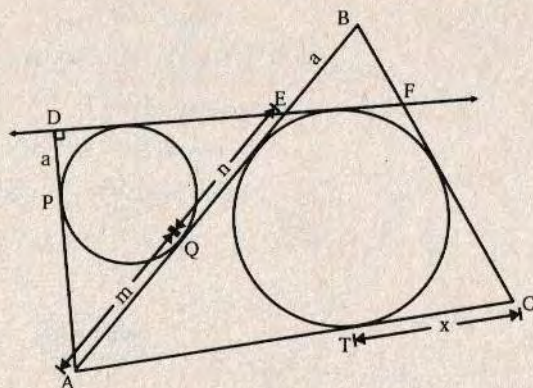
$\triangle ABC$: Teorema de Poncelet

$$a + b = a + b - 5,4 + 2r$$

$$\therefore r = 2,7$$

Rpta.: C

Resolución 65:



Piden "x"

Del dato :

$$2P_{\triangle ABC} = 40 \rightarrow P_{\triangle ABC} = 20$$

$$2P_{\triangle ADE} = 24 \rightarrow P_{\triangle ADE} = 12$$

$$\text{Luego : } m + n + a = 12 = P_{\triangle ADE}$$

Finalmente :

$$x = P_{\triangle ABC} - AB \text{ (Teorema)}$$

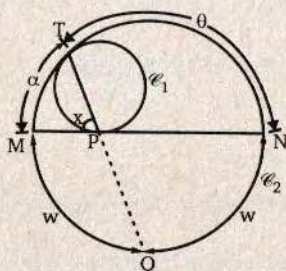
$$x = 20 - (m+n+a)$$

$$x = 20 - 12$$

$$\therefore x = 8$$

Rpta.: D

Resolución 66:



Piden : x

Prolongamos $\overline{TP}$ hasta Q ($Q \in \mathcal{C}_2$)

Luego : $m\widehat{MQ} = m\widehat{QN}$ (Teorema)

Se observa : $\alpha + \theta + 2w = 360^\circ$

$$\rightarrow w = 180^\circ - \left(\frac{\alpha + \theta}{2}\right)$$

También : $x = \frac{\alpha + w}{2}$ (Ángulo interior)

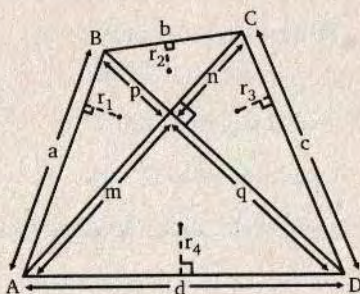
Reemplazando :

$$x = \frac{\alpha + 180^\circ - \left(\frac{\alpha + \theta}{2}\right)}{2}$$

$$\therefore x = 90^\circ + \left(\frac{\alpha - \theta}{4}\right)$$

Rpta.: A

Resolución 67:



Por demostrar : $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$

Del dato : $a + c = b + d$ (Teorema de Pitot)

Luego: Aplicamos Teorema de Poncelet en
 $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$ y $\triangle DOA$

$$m + p = a + 2r_1 \dots\dots (I)$$

$$m + p = b + 2r_2 \dots\dots (II)$$

$$m + q = c + 2r_3 \dots\dots (III)$$

$$m + q = d + 2r_4 \dots\dots (IV)$$

$$(I) + (III)$$

$$m + n + p + q = a + c + 2(r_1 + r_3) \dots (\alpha)$$

$$(II) + (IV)$$

$$m + n + p + q = b + d + 2(r_2 + r_4) \dots (\beta)$$

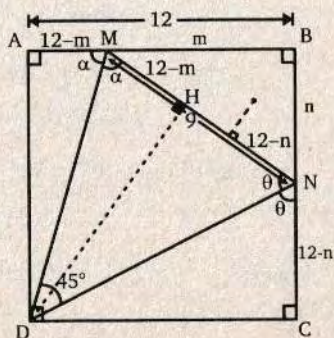
$$(\alpha) = (\beta)$$

$$a + c + 2(r_1 + r_3) = b + d + 2(r_2 + r_4)$$

$$\therefore (r_1 + r_3) = (r_2 + r_4) \text{ lqqd}$$

Rpta.:

Resolución 68:



Piden : "r"

$\overline{BD}$: bisectriz del $\angle MBN$

$$\text{y } 45^\circ = 90^\circ - \frac{m\angle MBN}{2}$$

$\rightarrow D$: Excentro del $\triangle NBM$

Luego : Trazamos $\overline{DH} \perp MN$

$\rightarrow AM = MH = 12 - m$ (T. de la bisectriz)

$\rightarrow HN = NC = 12 - n$ (T. de la bisectriz)

Se observa :

$$12 - m + 12 - n = 9$$

$$m + n = 15$$

Luego:

$\triangle MBN$ (T. de Poncelet)

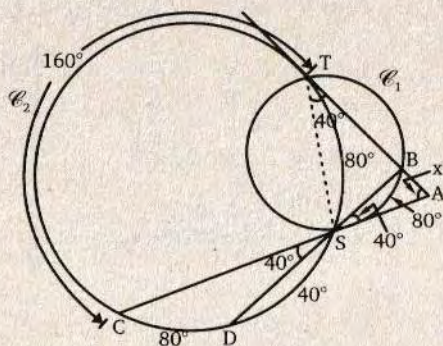
$$\frac{m + n}{2} = 9 + 2r$$

$$15 = 9 + 2r$$

$$\therefore r = 3$$

Rpta.: C

Resolución 69:



Piden : "x"

$$m\angle CSD = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ = m\angle BSA$$

$$m\widehat{BS} = 80^\circ$$

$$\rightarrow m\angle STB = 40^\circ$$

$$m\widehat{TS} = 80^\circ$$

$$m_{\odot} = 360^\circ \rightarrow m\widehat{CT} = 160^\circ$$

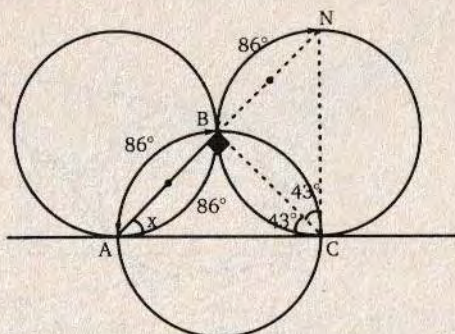
Finalmente :

$$x = \frac{160^\circ - 80^\circ}{2} \quad (\text{Ángulo Exterior})$$

$$\therefore x = 40$$

Rpta.: C

Resolución 70:



Piden : "x"

$$m\angle BCA = \frac{86^\circ}{2} = 43^\circ (\angle \text{inscrito})$$

$$m\widehat{AB} = m\widehat{BN} \text{ (teorema)}$$

$\rightarrow AB = BN$ (circunferencias
congruentes)

$$m\angle BCN = \frac{86^\circ}{2} = 43^\circ (\angle \text{inscrito})$$

Luego : $\triangle ANC$: Isósceles

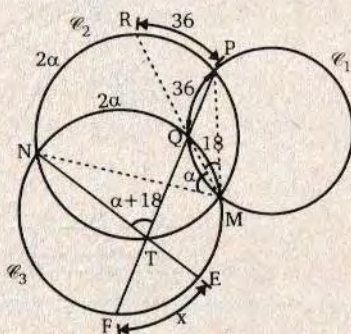
$$\rightarrow \overline{CB} \perp \overline{AN}$$

$$\text{Luego: } x + 43^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore x = 47^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 71:



Piden : "x"

$$m\angle QMP = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ (\text{Ángulo inscrito})$$

$$m\widehat{RP} = 36^\circ$$

Trazamos $\overline{MN}$

$$\text{Luego: } m\widehat{NQ} = 2\alpha$$

$$m\widehat{NR} = 2\alpha$$

También :

$$m\angle NTP = \frac{2\alpha + 36^\circ}{2} = \alpha + 18^\circ$$

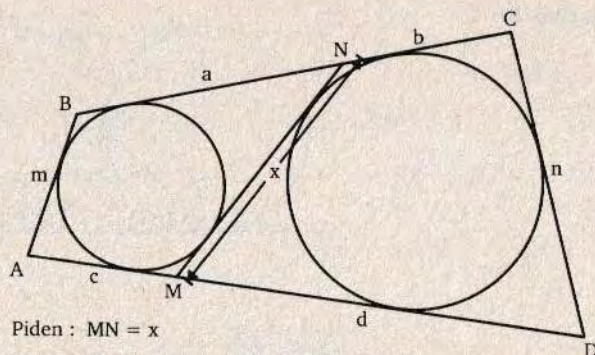
$$\text{Finalmente: } \alpha + 18^\circ = \frac{2\alpha + 36^\circ}{2}$$

$$2\alpha + 36^\circ = 2\alpha + x$$

$$\therefore x = 36^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 72:



Piden : $MN = x$

Teorema de Pitot :

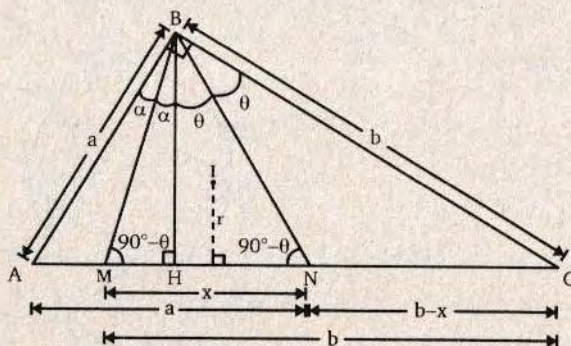
$$\left. \begin{array}{l} m + x = a + c \\ n + x = b + d \end{array} \right\} (+)$$

$$\frac{m + n + 2x = a + b + c + d}{24 + 2x = 40}$$

$$\therefore x = 8$$

Rpta.: C

Resolución 73:



Sea I : incentro del $\triangle ABC$ (r : inradio)

Por demostrar : $x = 2r$

Del gráfico :

$$m\angle MBC = m\angle BMC = 90^\circ - \alpha$$

$\rightarrow \triangle MBC$: Isósceles ($BC = MC = b$)

$$m\angle ABN = m\angle ANB = 90^\circ - \theta$$

$\rightarrow \triangle ABN$: Isósceles ($AB = AN = a$)

Luego : $NC = b - x \rightarrow AC = a + b - x$

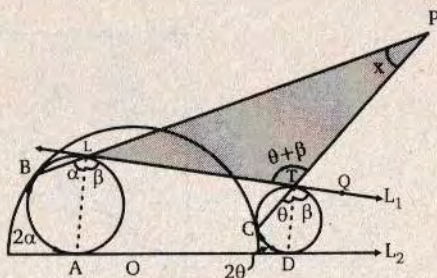
$\triangle ABC$: Teorema de Poncelet

$$a + b = a + b - x + 2r$$

$$\therefore x = 2r$$

Rpta.:

Resolución 74:



Del dato : $m\widehat{AB} - m\widehat{CD} = 110^\circ$

$$2\alpha - 2\theta = 110^\circ \rightarrow \alpha - \theta = 55^\circ \dots (I)$$

Como L_1 y L_2 son tangentes comunes a las circunferencias; por teorema:

$$\overline{AL} \parallel \overline{TD}$$

$$m\angle TLA = m\angle QTD = \beta$$

Además por ángulos opuestos por el vértice : $m\angle LTP = \theta + \beta$

En el $\triangle LTP$

(Teorema del ángulo exterior)

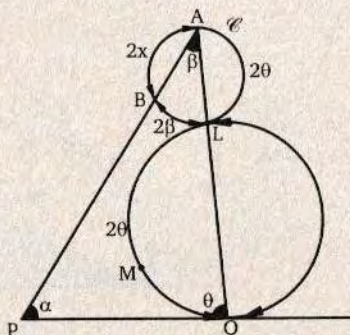
$$\alpha + \beta = x + \theta + \beta$$

$$x = \alpha - \theta$$

$$\therefore \text{Por (I)} : x = 55^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 75:



$$\text{Sea } m\angle BAL = \beta \rightarrow m\widehat{BL} = 2\beta$$

$$\text{Sea } m\angle AQP = \theta \rightarrow m\widehat{QML} = 2\theta$$

$$\text{Por Teorema: } m\widehat{QML} = m\widehat{LA} = 2\theta$$

En la circunferencia $\mathcal{C}$:

$$2x + 2\theta + 2\beta = 360^\circ$$

$$x + \theta + \beta = 180^\circ \dots (I)$$

En el $\triangle PAQ$:

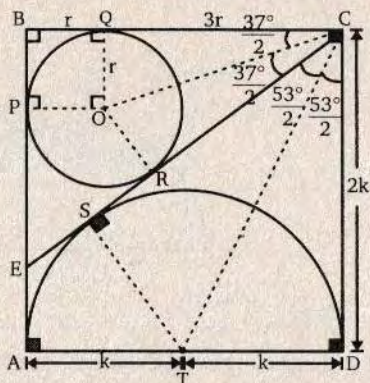
$$\alpha + \theta + \beta = 180^\circ \dots (II)$$

$$\text{De (I) y (II)} : \alpha = x$$

$$\therefore m\widehat{AB} = 2x$$

Rpta.: E

Resolución 76:



$\triangle TCD$ (Notable de $\frac{53^\circ}{2}$)

$$\Rightarrow m\angle ECD = 53^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle ECD = 37^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle OCQ = \frac{37^\circ}{2}$$

$\triangle OCQ$ (Notable de $\frac{37^\circ}{2}$)

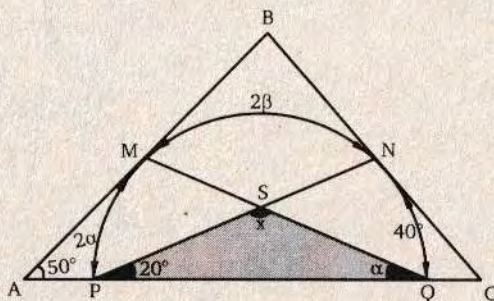
$$\text{Si } OQ = r \Rightarrow QC = 3r$$

$$\Rightarrow BC = 4r = 8 \text{ (Dato } AB=8\text{)}$$

$$\therefore OQ = 2$$

Rpta.: B

Resolución 77:



Sean $m\widehat{PM} = 2\alpha$ y $m\widehat{MN} = 2\beta$

$$\Rightarrow m\angle MQP = \alpha$$

Como $\widehat{PQ}$ es Diámetro

$$\alpha + \beta = 70^\circ \dots\dots (I)$$

Por ángulo exterior : (En A)

$$50^\circ = \frac{2\beta + 40^\circ - 2\alpha}{2}$$

$$\beta - \alpha = 30^\circ \dots\dots (II)$$

De (I) y (II)

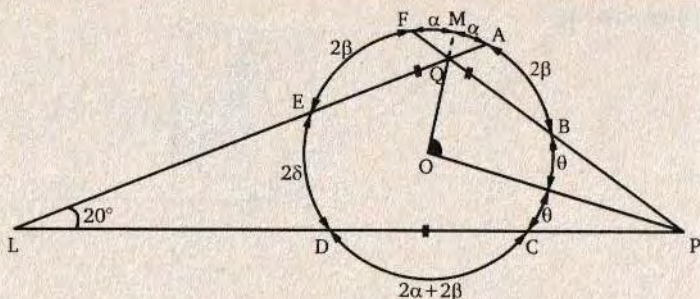
En el $\triangle PSQ$:

$$x + 20 + \alpha = 180$$

$$\therefore x = 140^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 80:



Como las cuerdas $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ son congruentes, entonces el radio $\overline{OM}$ biseca el arco $\widehat{AF}$ (Teorema) :

$$\widehat{mAM} = \widehat{mMF} = \alpha$$

Como las cuerdas BF y CD son congruentes, entonces por propiedad $\overline{OP}$ biseca el arco $\widehat{BC}$: $m\widehat{BN} = m\widehat{NC} = \theta$

Piden : $x = \alpha + 2\beta + \theta \dots\dots (I)$

Ángulo Exterior $\sphericalangle$ ALC :

$$\frac{2\beta + 20 - 2\delta}{2} = 20$$

$$\beta + \theta - \delta = 20 \dots\dots (II)$$

Sumando todos los arcos de la circunferencia :

$$4\alpha + 6\beta + 2\theta - 2\delta = 360$$

$$\Rightarrow 2\alpha + 3\beta + \theta - \delta = 180 \dots\dots \text{(III)}$$

De (I) + (II) :

$$2\alpha + 4\beta + 2\theta = 200$$

$$\alpha + 2\beta + \theta = 100$$

De (I) :

$$\therefore x = 100$$

Rpta.: D

En consecuencia : $\overline{OP} \parallel \overline{AD} \Rightarrow \overline{LO} \perp \overline{OP}$

$$2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Además : En $\triangle AOL$ (Notable de $\frac{53^\circ}{2}$)

$$OL = r \Rightarrow AO = r\sqrt{5} \Rightarrow KC = CP = 2r\sqrt{5} \dots (I)$$

En el $\triangle PQD$ (Notable de 45°)

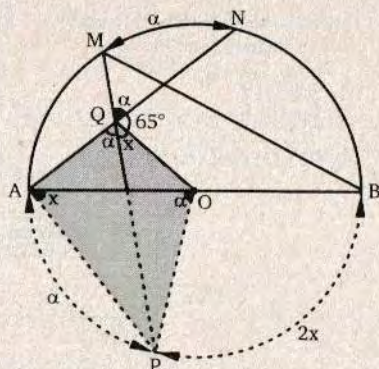
$$PQ = r \Rightarrow PD = r\sqrt{2} \dots (II)$$

Luego:

$$\frac{CP}{PD} = \frac{2r\sqrt{5}}{r\sqrt{2}} = \sqrt{10}$$

Rpta.: D

Resolución 83:



Completamos la circunferencia y prolongamos $\overline{MQ}$ hasta $P \in \ell$

Del dato y aplicando el teorema del ángulo interior :

$$\frac{m\widehat{MN} + m\widehat{AP}}{2} = m\angle MQN$$

$$\frac{\alpha + m\widehat{AP}}{2} = \alpha$$

$$\Rightarrow m\widehat{AP} = \alpha$$

Por Ángulo Central

$$m\angle AOP = \alpha$$

Ahora tenemos el $\triangle AQOP$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\angle OAP = x$$

$$\Rightarrow m\widehat{PB} = 2x$$

En la Semicircunferencia $\widehat{APB}$:

$$2x + \alpha = 180^\circ \dots (I)$$

En el punto Q :

$$x + 65^\circ + \alpha = 180^\circ \dots (II)$$

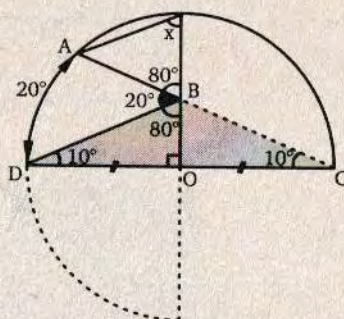
De (I) y (II) :

$$2x + \alpha = x + 65^\circ + \alpha$$

$$\therefore x = 65^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 86:



Completamos medidas angulares:

Trazamos $\overline{BC}$ y como $\overline{BD}$ es mediatriz de $\overline{DC} \Rightarrow m\angle BCO = 10^\circ$

En el $\triangle DBC$:

$$m\angle BDO + m\angle DCB = m\angle \lambda BA$$

(Teorema del Ángulo exterior)

$\Rightarrow A, B$ y C son colineales

$\Rightarrow$ Por Ángulo Inscrito

$$m\widehat{DA} = 2(10^\circ) = 20^\circ$$

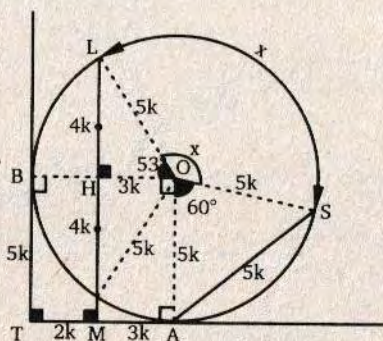
Luego por Ángulo Inscrito

$$x = \frac{20^\circ + 90^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 55^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 87:



Del Dato:

$$\frac{15(TM)}{30} = \frac{10(MA)}{30} = \frac{6(AS)}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{TM}{2} = \frac{MA}{3} = \frac{AS}{5} = K$$

$$\Rightarrow TM = 2K$$

$$MA = 3K$$

$$AS = 5K$$

$$BT = TA = AO = BO = 5k \text{ (Radio)}$$

$$\overline{OB} \perp \overline{LM} \Rightarrow LH = HM$$

$$\triangle LHO \text{ (Notable de } 37^\circ \text{ y } 53^\circ) \Rightarrow m\angle LOH = 53^\circ$$

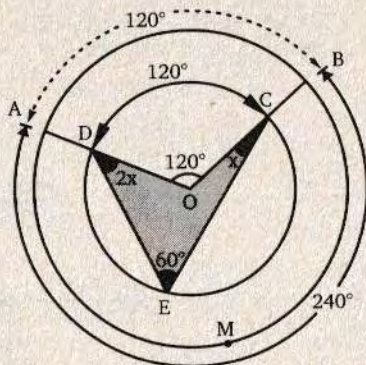
Luego en el centro de la circunferencia :

$$x + 53^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore x = 157^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 88:



Dato : $\widehat{m\text{AMB}} = 240 \Rightarrow \widehat{m\text{AB}} = 120^\circ$

Como las circunferencias son concéntricas

$m\angle DOC = 120^\circ$ y por Ángulo Inscrito

$$m\angle DEC = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

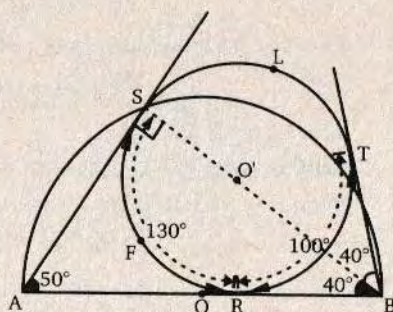
Propiedad $\triangle$ DECO :

$$120^\circ = 2x + 60^\circ + x$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 89:



Sea O' centro de la circunferencia
 $\Rightarrow \overline{O'S} \perp \overline{AS}$ y como $\overline{AB}$ es diámetro
 de la semicircunferencia $\Rightarrow \overline{AS} \perp \overline{SB}$
 Por lo tanto S, O' y B son colineales
 Por Propiedad:

$$m\angle SAR + \frac{m\widehat{SR}}{2} = 180^\circ$$

$$\frac{130^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle SAR = 50^\circ$$

$$\triangle ASB : m\angle SBA = 40^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle TBO' = 80^\circ$$

Por Propiedad :

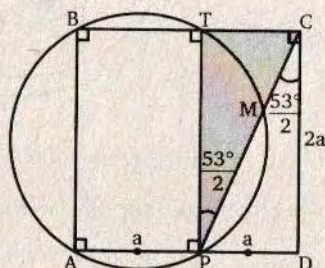
$$m\widehat{RT} + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\widehat{RT} = 100^\circ$$

$$\text{Luego } m\widehat{SLT} + 130^\circ + 100^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore m\widehat{SLT} = 130^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 90:



Trazamos $\overline{PT}$

$\Rightarrow$ En el $\triangle ABTP$ (inscrito):

$$m\angle T = 90^\circ \wedge m\angle P = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ABTP$ es un rectángulo como:

$$AP = PD = a$$

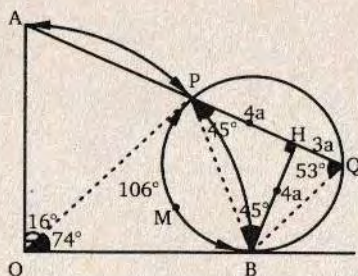
$$\text{Además : } m\angle PCD = m\angle CPT = \frac{53^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \triangle PTC \text{ (Notable de } \frac{53^\circ}{2})$$

$$\Rightarrow m\widehat{TM} = 2\left(\frac{53^\circ}{2}\right)$$

$$\therefore m\widehat{TM} = 53^\circ$$

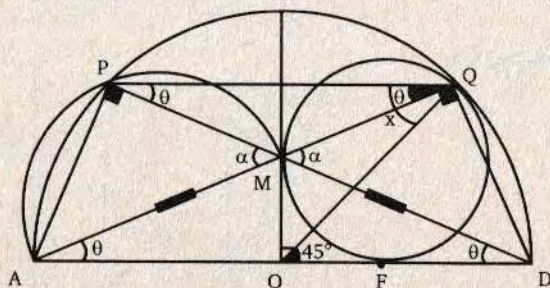
Rpta.: D

Resolución 93:

$$\begin{aligned} m\angle BPQ &= 45^\circ \\ \Rightarrow \triangle BPH (\text{Notable de } 45^\circ) \\ \Rightarrow PH &= BH = 4a \\ \text{Dato : } PQ &= 7a \\ \Rightarrow HQ &= 3a \\ \Rightarrow \triangle BPH (\text{Notable de } 37^\circ \text{ y } 53^\circ) \end{aligned}$$

Rpta.: C

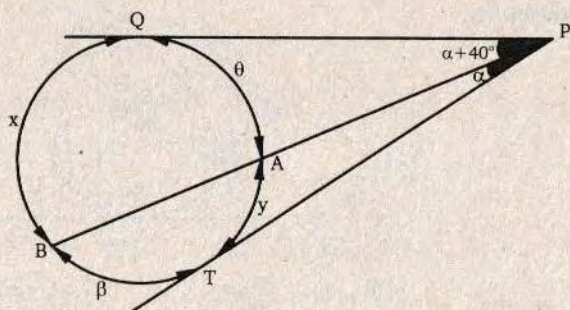
Resolución 94:



Como: $m\angle APM = m\angle APD = 90^\circ$ $\Rightarrow P, M$ y D son colineales	Teorema del ángulo inscrito(rebote)
Además por teorema A, M y Q son colineales	$m\angle QPD = m\angle QAD = m\angle PQA$ $= m\angle PDA = \theta$
También $\triangle AMO \cong \triangle DMO$ $\Rightarrow m\angle MAO = m\angle MDO = \theta$	$\Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{PQ}$ $\therefore$ Por ángulos alternos internos $x = 45^\circ$

Rpta.: D

Resolución 97:



Piden $x+y$

Teorema del ángulo exterior

$$\begin{cases} \alpha + 40^\circ = \frac{x - \theta}{2} \\ \alpha = \frac{\beta - y}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta - y}{2} + 40^\circ = \frac{x - \theta}{2}$$

$$\beta + \theta + 80^\circ = x + y$$

$$\rightarrow \beta + \theta = x + y - 80^\circ$$

Además :

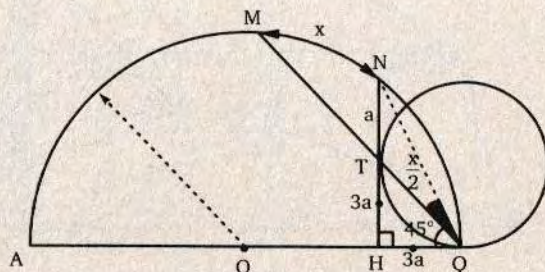
$$x + y + \theta + \beta = 360^\circ$$

$$(x + y) + (x + y - 80^\circ) = 360^\circ$$

$$\therefore x + y = 220^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 98:



$\triangle THQ$: Notable de 45°

$$\Rightarrow TH = HQ = 3a$$

$\triangle NHQ$: Catetos de 4 a 3 (Notable de 53° y 37°)

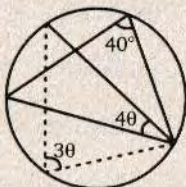
$$\Rightarrow \frac{x}{2} + 45^\circ = 53^\circ$$

$$\therefore x = 16^\circ$$

Rpta.: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En el gráfico. Hallar "θ"



- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

2. Se tiene dos circunferencias tangentes exteriores cuyos radios miden 12 y 3. Hallar la medida del segmento tangente común exterior a ambas circunferencias.

- A) 9 B) 12 C) 15
D) 8 E) 16

3. ABCD es un cuadrilátero circunscriptible, tal que: $m\angle ABC = 90^\circ$, $m\angle BAD = 37^\circ$ y $CD = 5$. Hallar el radio de la circunferencia inscrita al cuadrilátero, si: $AD + BC = 21$.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

4. El perímetro de un trapecio isósceles es 64. Las medidas de los ángulos adyacentes a la base mayor miden 30° . Hallar el radio de la circunferencia inscrita en el trapecio.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

5. En un triángulo rectángulo ABC recto en B; $AB = 15$ y $BC = 20$. Si se traza la altura $\overline{BH}$. Hallar el inradio del triángulo BHC

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 3,5 E) 4,5

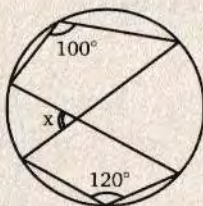
6. En una circunferencia se inscriben el cuadrado ABCD y el triángulo equilátero PQR, tal que: $\overline{BC} \parallel \overline{PR}$.

Hallar $\frac{m\widehat{QD}}{m\widehat{PB}}$

- A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

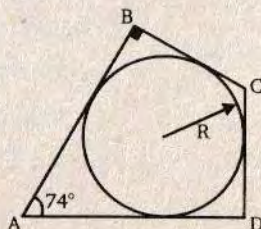
7. En el gráfico. Hallar "x"

- A) 20°
B) 35°
C) 30°
D) 40°
E) 50°

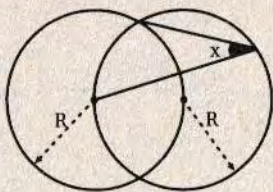


8. En la figura se muestra un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia. Hallar "R".
Si: $CD = 5$ y $BC + AD = 19$

- A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

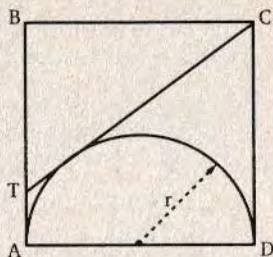


9. En el gráfico, las circunferencias son congruentes. Hallar "x"



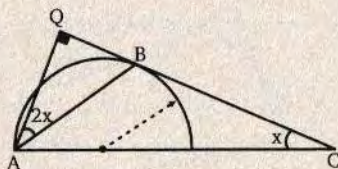
- A) 15° B) 25° C) 30°
D) 45° E) 36°

10. Calcular el perímetro del triángulo TBC, si ABCD es un cuadrado y $r = 6$



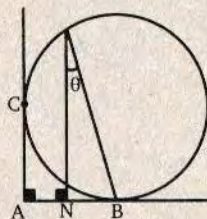
- A) 24 B) 30 C) 36
D) 42 E) 48

11. De la figura "B" es punto de tangencia. Hallar "x"



- A) 18° B) 20° C) 12°
D) 36° E) 24°

12. En la figura mostrada B y C son puntos de tangencia. Hallar " θ ", si: $AN = NB$

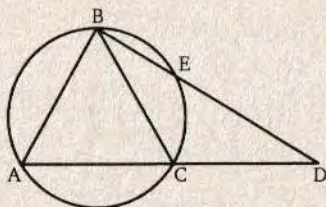


- A) 18° B) 15° C) 30°
D) $53^\circ/2$ E) $37^\circ/2$

13. Dos circunferencias son secantes en el punto A. Las tangentes trazadas en "A" en cada circunferencia forman un ángulo de 75° , y cortan a las circunferencias en los puntos B y C. Hallar el ángulo formado por las tangentes trazadas por los puntos B y C.

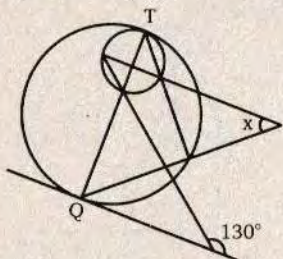
- A) 45° B) 30° C) $37,5^\circ$
D) $22,5$ E) 60°

14. Si en el gráfico $AB = BC$ y $m \angle BDA = 25^\circ$, calcule $m\widehat{BE}$



- A) 25° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 35°

15. Sean T y Q puntos de tangencia. calcule x

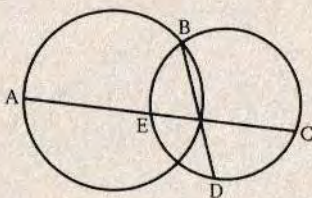


- A) 50° B) 55° C) 60°
D) 65° E) 70°

16. Desde el punto R exterior a una circunferencia de diámetro AB, se trazan las secantes RA y RB, que intersectan a la circunferencia en P y Q, respectivamente. Calcule $m\angle RQP$ si $AP=PR$ y $m\widehat{QB} = 36^\circ$

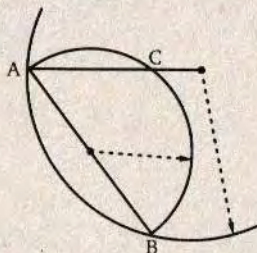
- A) 36° B) 54° C) 60°
D) 45° E) 72°

17. En el gráfico: $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 260^\circ$. Calcule: $m\widehat{ED}$



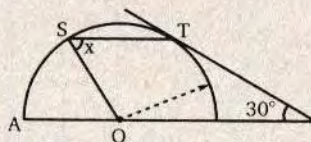
- A) 80° B) 90° C) 100°
D) 110° E) 120°

18. En el gráfico: $m\widehat{AB} = 80^\circ$. Calcule: $m\widehat{AC}$



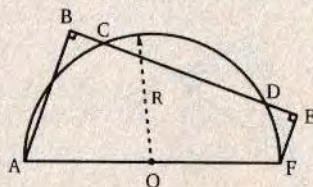
- A) 40° B) 50° C) 60°
D) 80° E) 70°

19. En el gráfico, calcule x, siendo T punto de tangencia y $m\widehat{AS} = 60^\circ$



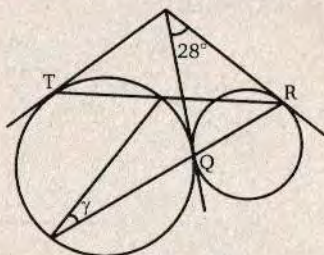
- A) 45° B) 50° C) 55°
D) 60° E) 65°

20. En el gráfico, $AB+EF=8$ y $CD=6$, calcule R.



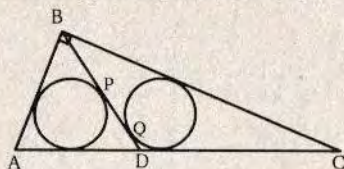
- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

28. En el gráfico, T, Q y R son puntos de tangencia. Calcule γ .



- A) 10° B) 28° C) 12°
D) 13° E) 14°

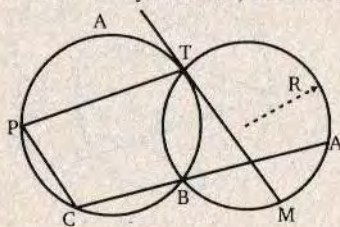
29. Calcule el inradio del triángulo rectángulo ABC, si $BP - QD = 20\text{cm}$



- A) 5cm B) 10cm C) 15cm
D) 20cm E) 40cm

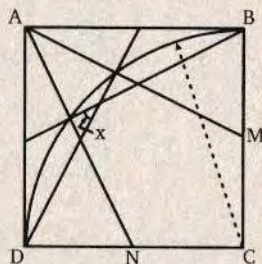
30. Según el gráfico, T es punto de tangencia. Si $m\angle TPC = 65^\circ$.

$m\widehat{AM} = 20^\circ$ y $AB = R\sqrt{3}$; calcule $m\widehat{CB}$



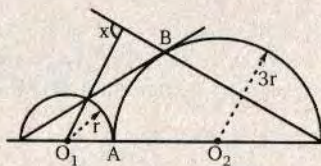
- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

31. En el gráfico, ABCD es un cuadrado, además, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$. Calcule x.



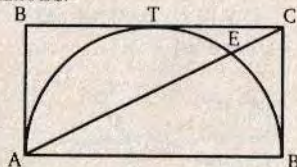
- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

32. Si A y B son puntos de tangencia, calcule x.



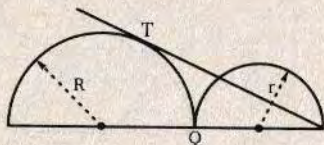
- A) 80° B) 75° C) $100^\circ 30'$
D) 74° E) 106°

33. En la figura, ABCD es un rectángulo, $\overline{AD}$ es diámetro de la circunferencia y T es punto de tangencia. Si $AE = 4\text{m}$, halle EC.



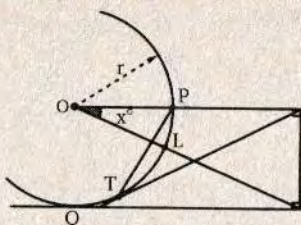
- A) 1m B) 2m C) 0,5m
D) 1,5m E) 0,8m

40. Del gráfico T y Q son puntos de tangencia, $TQ=R$; calcule: $\frac{R}{r}$



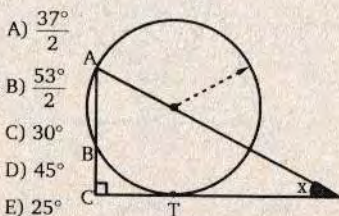
- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{4}$ E) 3

41. Según el gráfico, T y Q son puntos de tangencia y $PT=r$; calcule x.



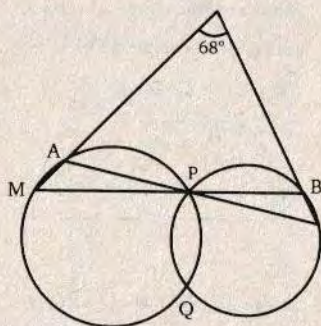
- A) 53 B) $\frac{53}{2}$ C) 45
D) 37 E) $\frac{37}{2}$

42. En el gráfico, $AB=2(BC)$ y T es punto de tangencia. Calcule x.



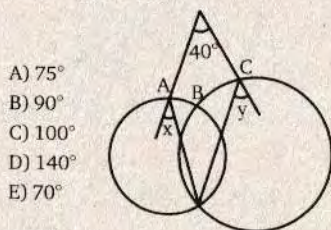
- A) $\frac{37}{2}$
B) $\frac{53}{2}$
C) 30°
D) 45°
E) 25°

43. Calcule $m\widehat{MAP} + m\widehat{PB}$.



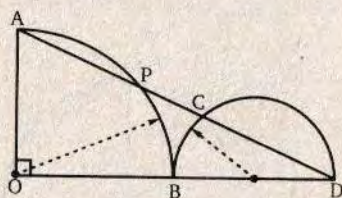
- A) 200° B) 136° C) 180°
D) 224° E) 120°

44. Según el gráfico, Calcule $x + y$, si: $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 60^\circ$.



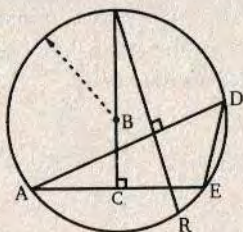
- A) 75°
B) 90°
C) 100°
D) 140°
E) 70°

45. Según el gráfico, $AP = PC$. Calcule: $m\widehat{CD}$



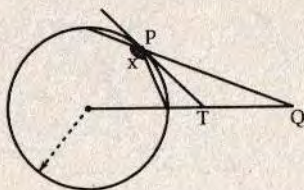
- A) 135° B) 120° C) 143°
D) 127° E) 153°

46. Según el gráfico, $AM=MB$ y $DE=8$.
Calcule CR.



- A) 8 B) $8\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

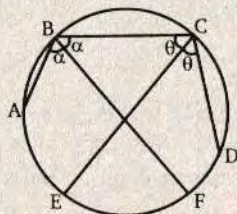
47. Según el gráfico $PT=TQ$. Siendo P punto de tangencia, calcule x.



- A) 150° B) 135° C) 120°
D) 127° E) 143°

48. En el gráfico, calcule $m\widehat{EF}$ si:

$$m\widehat{AB} + m\widehat{CD} + m\widehat{EF} = 240^\circ$$

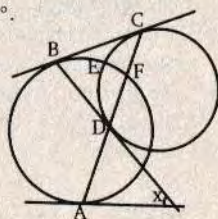


- A) 60° B) 50° C) 100°
D) 80° E) 90°

49. Según el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule x si:

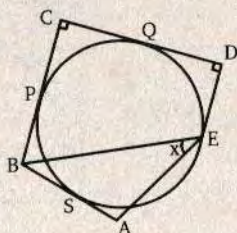
$$m\widehat{BEF} = 50^\circ.$$

- A) 40°
B) 60°
C) 45°
D) 50°
E) 70°

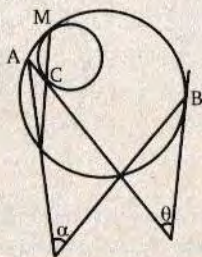


50. En el gráfico, P, Q y S son puntos de tangencia. Calcule x, si $AE = 2(AB)$ y $m\widehat{SP} + m\widehat{PQ} = m\angle DEA$.

- A) $\frac{37^\circ}{2}$
B) 30°
C) 15°
D) $\frac{53^\circ}{2}$
E) 16°



51. Según el gráfico, C; M y B son puntos de tangencia, calcule $m\widehat{AMB}$.

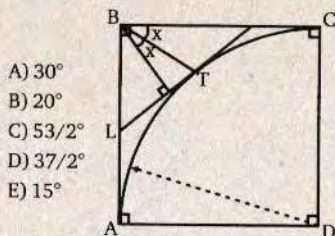


- A) $90^\circ + \alpha + \theta$ B) $90^\circ - \frac{(\alpha + \theta)}{2}$
C) $90^\circ + \frac{(\alpha + \theta)}{2}$
D) $90^\circ + \alpha + \frac{\theta}{2}$ E) $90^\circ - \frac{\theta}{2} + \alpha$

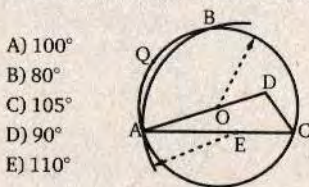
52. Interiormente a un cuadrado ABCD se traza los cuadrantes BAD y ADC, los que se intersecan en P. Exteriormente a dicho cuadrado está el triángulo equilátero CRD; si T es punto medio del arco PD, calcule la medida del ángulo ART.

- A) 8° B) 15° C) 27°
D) 20° E) 30°

53. Según el gráfico ABCD es un cuadrado, T es punto de tangencia. Calcule x .



54. En el gráfico, el triángulo EDC es equilátero y $m\widehat{BC} = 120^\circ$. Calcule $m\widehat{AOB}$.



55. Una circunferencia es tangente a tres lados de un paralelogramo cuyas alturas miden 26 y 18. Hallar la longitud de la cuerda determinada en la circunferencia por el cuarto lado.

- A) 16 B) 12 C) 20
D) 24 E) 22

56. Se tiene dos circunferencias concéntricas de radios a y b ($a < b$). Hallar el radio de una tercera circunferencia que sea tangente a la menor y ortogonal a la mayor.

A) $\frac{b^2 + a^2}{2b}$ B) $\frac{b^2 - a^2}{2b}$

B) $\frac{b^2 - a^2}{2b}$

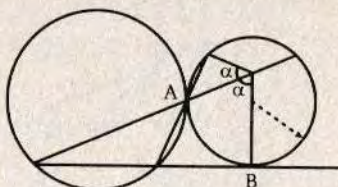
C) $\frac{b^2 - a^2}{2a}$

C) $\frac{b^2 - a^2}{2a}$

D) $\sqrt{a^2 + b^2}$ E) $\sqrt{ab}$

E) $\sqrt{ab}$

57. En el gráfico A y B son puntos de tangencia. Calcule el valor de α .



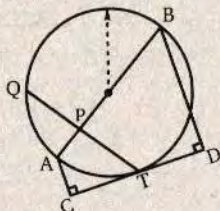
- A) 18° B) 30° C) 20°
D) 36° E) 45°

58. Se tiene dos circunferencias concéntricas de radios R y r ($R > r$). En el anillo formado se colocan 6 circunferencias de radios $\left(\frac{R-r}{2}\right)$ de manera que cada una de ellas es tangente a las dos contiguas y a las circunferencias concéntricas. Hallar R/r .

- A) 3 B) 5 C) 2
D) 4 E) 1.5

59. Según el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule $(AC)(BD)$, si:

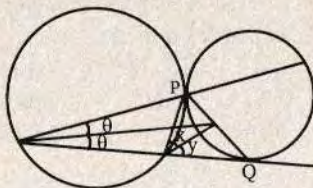
$$(AP)(PB) = 36 \text{ y } m\widehat{AQ} = m\widehat{AT}$$



- A) 9 B) 72 C) 36
D) 18 E) 144

60. Si P y Q son puntos de tangencia;

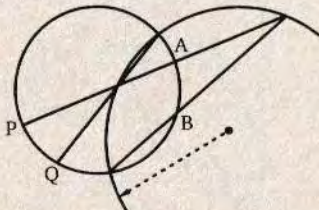
$$\text{Calcule } \frac{x}{y}.$$



- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 1 E) 2

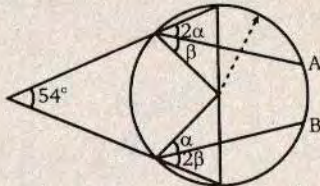
61. En el gráfico mostrado:

$$\text{Si } m\widehat{AB} = 40^\circ. \text{ Calcule } m\widehat{PQ}.$$



- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

62. Del gráfico, calcule: $m\widehat{AB}$.



- A) 42° B) 6° C) 12°
D) 21° E) 16°

63. En un rectángulo ABCD, se ubican los puntos M y N en el lado $\overline{BC}$ tal que: $\overline{BM} \cong \overline{MN} \cong \overline{NC}$. El trapecio AMND es circunscriptible a una circunferencia. Si $CD = 18u$, entonces la longitud (en u) del radio de la semicircunferencia cuyo centro está en el lado $\overline{AB}$, pasa por el vértice B y es tangente a $\overline{AM}$ es:

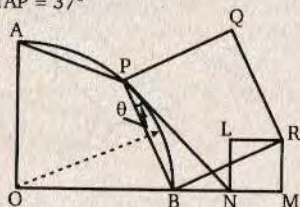
- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

64. En una circunferencia de centro O, se circunscribe el cuadrilátero ABCD. El lado $\overline{AD}$ es tangente a la circunferencia en el punto M. Si $AB = 5u$, $BC = 7u$, $CD = 8u$, $AO = 3u$ y $m\angle CDA = 90^\circ$, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia inscrita al triángulo AMO es:

- A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

65. En el gráfico, BPQR y NLRM son cuadrados. Calcule θ si se sabe que:

$$m\widehat{AP} = 37^\circ$$



- A) 15° B) 16° C) $37^\circ/2$
D) $45^\circ/2$ E) $53^\circ/2$

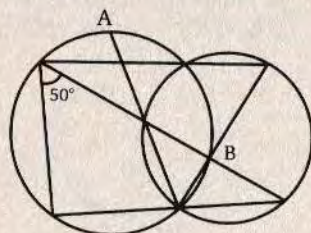
66. En un $\triangle ABC$ recto en B, se dibuja una circunferencia $\mathcal{C}_1$ tangente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P y R, luego se dibuja otra circunferencia $\mathcal{C}_2$ tangente a $\mathcal{C}_1$ y tangente a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos Q y S. Si $\overline{PQ}$ intercepta a $\mathcal{C}_1$ en M y a $\mathcal{C}_2$ en N, entonces la medida del ángulo agudo que determinan los rayos $\overline{RM}$ y $\overline{SN}$ es:

- A) 22,5 B) 30 C) 36
D) 37 E) 45

67. La cuerda común $\overline{BO}$, de dos circunferencias secantes es el diámetro de la circunferencia menor. Luego se trazan las cuerdas $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ de la circunferencia mayor. El diámetro $\overline{CD}$ de la circunferencia mayor, es perpendicular a la cuerda $\overline{AB}$ y las cuerdas $\overline{OA}$ y $\overline{BC}$ se interceptan en el punto M que pertenece a la circunferencia menor. Si $OA=16u$ y $OB=6u$, entonces la longitud (en u) de $\overline{OM}$ es:

- A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 5

68. Del gráfico mostrado, calcule: $m\widehat{AB}$.

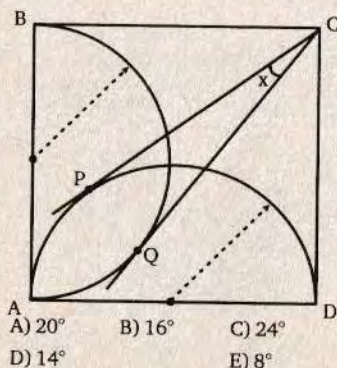


- A) 45° B) 50° C) 60°
D) 90° E) 100°

69. Un rectángulo ABCD, está inscrito en una circunferencia. Se ubica M punto medio del arco $\widehat{AD}$ y la tangente trazada por el vértice B es paralela a $\overline{MC}$. Entonces, $m\angle MCD$ es:

- A) 10 B) 15 C) 20
D) 30 E) 45

70. En el gráfico, ABCD es un cuadrado. P y Q son puntos de tangencia. Calcule x.



- A) 20° B) 16° C) 24°
D) 14° E) 8°

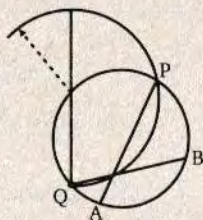
71. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Por dos puntos distintos, pasan infinitas circunferencias.
- II. Por tres puntos distintos no colineales, pasa una única circunferencia.
- III. La cuerda común de dos circunferencias secantes, siempre intercepta al segmento que une los centros de dichas circunferencias.

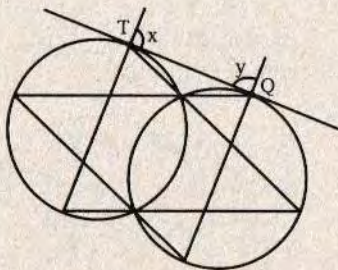
- A) VVV B) VFV C) FFF
D) FVF E) VVF

72. Del gráfico, $\overline{PQ}$ es diámetro, calcule $m\widehat{AB}$.

- A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 90°
E) 120°

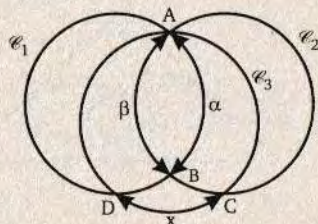


73. Del gráfico, calcule x/y si se sabe que T y Q son puntos de tangencia.



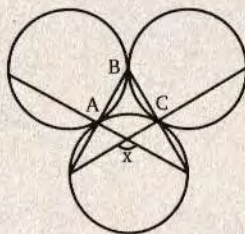
- A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 3

74. En el gráfico, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ son circunferencias congruentes. Si $\alpha + \beta = 160^\circ$, calcule x .



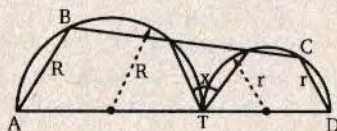
- A) 160° B) 80° C) 100°
D) 120° E) 90°

75. Si A, B y C son puntos de tangencia, calcule x . Considere que $m\angle ABC = 70^\circ$.



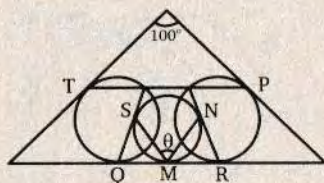
- A) 70° B) 80° C) 90°
D) 100° E) 110°

76. En el gráfico, T es el punto de tangencia. Calcule x .



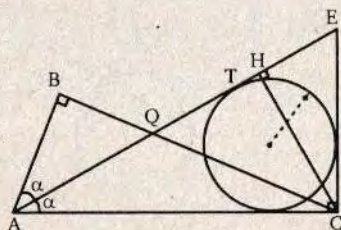
- A) 60° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 40°

77. En el gráfico que se muestra, T, P, Q, R, S, M y N son puntos de tangencia. Calcule θ .



- A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 40°

78. Calcule el inradio del triángulo ACE si $AH = 15$ cm y el perímetro de la región AQC es 40 cm. Considere que T es punto de tangencia.

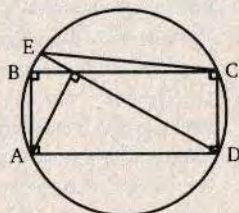


- A) 5cm B) 10cm C) 15cm
D) 25cm E) 30cm

79. En un triángulo ABC de altura BH (H en $\overline{AC}$), desde H se traza las perpendiculares $\overline{HM}$ y $\overline{HN}$ a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente (M en $\overline{AB}$ y N en $\overline{BC}$). Si $AB = 13$; $BC = 14$ y $AC = 15$, calcule la $m\angle BMN$.

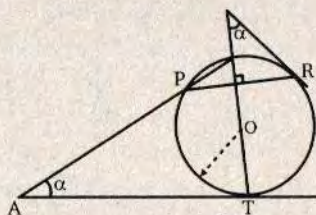
- A) 60° B) 70° C) 75°
D) 45° E) 53°

80. En el gráfico ABCD es un rectángulo, $\overline{ED}$ y $\overline{BC}$ determinan un ángulo que mide 15° . Calcule la $m\angle ECB$.



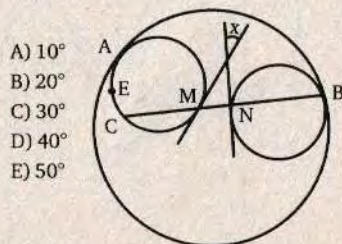
- A) 1° B) 2° C) 3°
D) 4° E) 5°

81. Del gráfico mostrado, calcule α si R y T son puntos de tangencia.



- A) $53^\circ/2$ B) $37^\circ/2$ C) 37°
D) 15° E) 30°

82. En el gráfico M, N, A y B son puntos de tangencia, calcule x si:
 $m\widehat{AB} = m\widehat{AEC} = 100^\circ$.

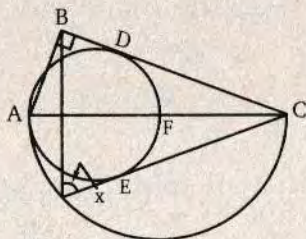


- A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°

83. Desde un punto P exterior a una circunferencia se traza las tangentes $\overline{PA}$; $\overline{PB}$ (A y B puntos de tangencia) y la secante $\overline{PCD}$ de modo que la $m\angle APB = m\widehat{CBD} = 90^\circ$; Calcule $m\widehat{AC}$.

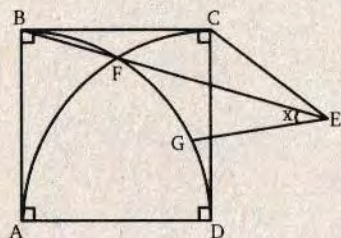
A) 30° B) 53° C) 50°
D) 75° E) 74°

84. Según el gráfico AC y AF son diámetros, A, D y E son puntos de tangencia. Calcule x si $3(DC) = 5(BD)$.



A) 37° B) 30° C) 45°
D) 53° E) 60°

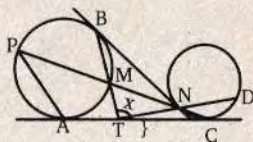
85. En la figura ABCD es un cuadrado. Calcule x, si $AB = CE$ y $m\widehat{FG} = m\widehat{GD}$.



A) 15° B) 10° C) 20°
D) 12° E) 18°

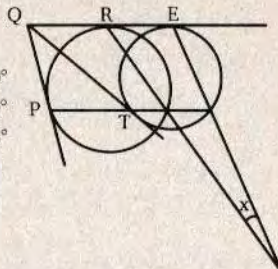
86. En el gráfico A, B, C y N son puntos de tangencia. Calcule x si $m\angle APM = 20^\circ$ y $m\widehat{CD} = 100^\circ$.

A) 120°
B) 75°
C) 60°
D) 45°
E) 90°



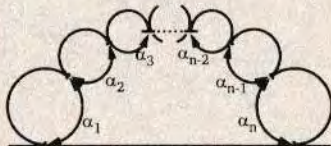
87. Según el gráfico, $m\angle PQT = 50^\circ$. Calcule x (P, T, R y E son puntos de tangencia).

A) 20°
B) 10°
C) 25°
D) 5°
E) 8°



88. En el gráfico se muestra n circunferencias tangentes exteriores consecutivamente.

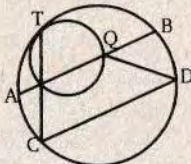
Calcule $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ en función de n (A y B puntos de tangencia).



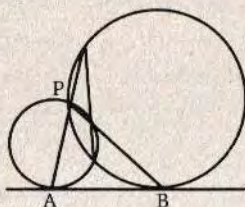
A) $180^\circ (n-2)$ B) $360^\circ (n-1)$
C) $180^\circ (n-1)$
D) 360° E) 180°

89. Del gráfico calcule la $m\angle A Q D$ si:
 $AB \parallel CD$ y $m\widehat{TDC} = \theta$.

- A) θ
B) $\theta/2$
C) 2θ
D) $90^\circ + \theta$
E) $90^\circ - \theta$

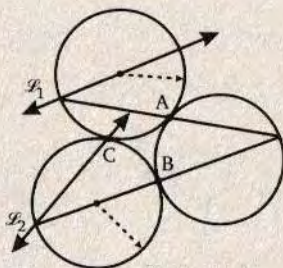


90. En el gráfico A y B son puntos de tangencia: calcule la $m\angle APB$



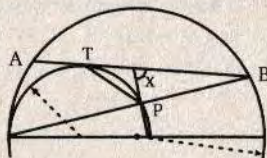
- A) 45° B) 75° C) 30°
D) 53° E) 60°

91. En la figura, las circunferencias son congruentes; A, B, y C son puntos de tangencia. Calcule la medida del ángulo entre $\vec{\mathcal{L}}_1$ y $\vec{\mathcal{L}}_2$



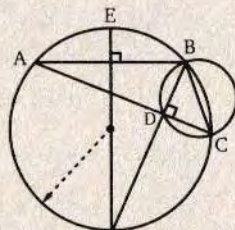
- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 90° E) 120°

92. Del gráfico, T es punto de tangencia. Calcule x, si $TP = PB$ y $m\widehat{AB} = \theta$



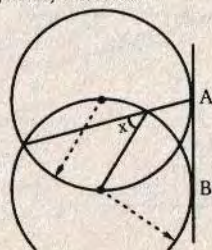
- A) $90^\circ - \frac{\theta}{2}$ B) $80^\circ - 4\theta$
C) $90^\circ - \frac{\theta}{3}$
D) $90^\circ - \frac{\theta}{4}$ E) $\frac{\theta}{4}$

93. Del gráfico, $AC = 24$ y $BC = 10$; calcule AD.



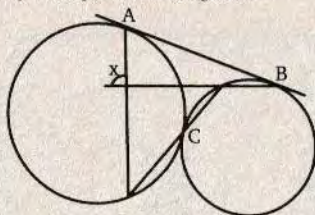
- A) 17
B) 14
C) 16
D) 15
E) 12

94. Del gráfico, siendo A y B puntos de tangencia, calcule x.



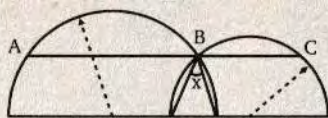
- A) 60° B) 45° C) 30°
D) 37° E) 36°

95. Del gráfico mostrado, calcule x si: A; B y C son puntos de tangencia.



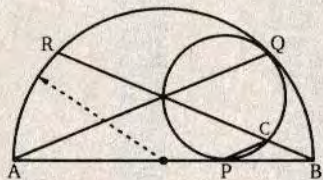
- A) 100° B) 80° C) 90°
D) 120° E) 60°

96. Del gráfico, mostrado, calcule x .
 $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 240^\circ$.



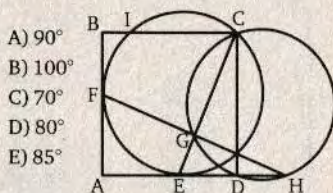
- A) 55° B) 45° C) 35°
D) 40° E) 30°

97. Del gráfico mostrado, P y Q son puntos de tangencia; $\widehat{AQ} \parallel \widehat{PC}$, calcule $m\widehat{RQ}$.



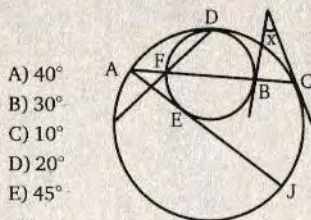
- A) 100° B) 145° C) 90°
D) 120° E) 108°

98. Del gráfico mostrado, ABCD es un rectángulo, E y F son punto de tangencia. Calcule $m\widehat{C}$.



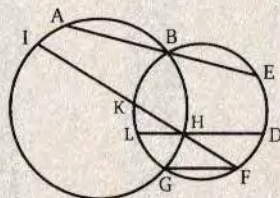
- A) 90°
B) 100°
C) 70°
D) 80°
E) 85°

99. Según el gráfico, B; C; D y E son puntos de tangencia. Calcule el valor de x si $m\widehat{IJ} = 100^\circ$ y $m\widehat{EF} = 40^\circ$.



- A) 40°
B) 30°
C) 10°
D) 20°
E) 45°

100. Según la figura, $m\widehat{BK} + m\widehat{BH} = \gamma$,
 $m\widehat{AI} + m\widehat{ED} = \theta$ y $\widehat{HD} \parallel \widehat{GF}$. Calcule $m\widehat{LG}$.



- A) $\frac{\gamma + \theta}{2}$ B) $\gamma - \theta$ C) $\gamma + \frac{\theta}{2}$
D) $\frac{\gamma}{2} + \theta$ E) $\frac{\gamma - \theta}{2}$

**CLAVES**

1	C
2	B
3	D
4	D
5	B
6	E
7	D
8	C
9	C
10	C
11	A
12	B
13	A
14	D
15	A
16	B
17	C
18	D
19	D
20	A
21	C
22	B
23	A
24	C
25	B

26	C
27	B
28	E
29	D
30	A
31	B
32	C
33	A
34	C
35	A
36	D
37	C
38	C
39	E
40	B
41	B
42	C
43	D
44	E
45	C
46	A
47	B
48	D
49	D
50	D

51	D
52	B
53	C
54	D
55	C
56	D
57	D
58	A
59	C
60	D
61	C
62	C
63	D
64	B
65	C
66	E
67	E
68	E
69	D
70	B
71	E
72	D
73	B
74	C
75	E

76	A
77	C
78	A
79	E
80	A
81	E
82	B
83	D
84	D
85	A
86	C
87	C
88	C
89	B
90	E
91	A
92	D
93	A
94	B
95	E
96	C
97	C
98	A
99	D
100	B

**SOLUCIONARIO
EXÁMENES DE
ADMISIÓN
UNIT - UNMSM**

UNI - 2003 - II

PROBLEMA 01: En la figura el punto O es el ortocentro e I es el incentro del $\triangle ABC$. Hallar la relación entre θ , α y β .

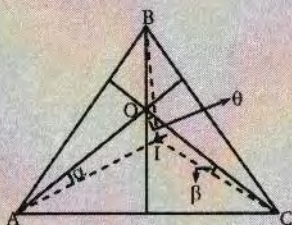
A) $\beta = 2\alpha - \theta$

B) $\beta = 2(\alpha - \theta)$

C) $\beta = \frac{\alpha + \theta}{2}$

D) $\beta = \frac{\alpha + \theta}{4}$

E) $\beta = \alpha - \theta$

**Resolución:**

Completando el gráfico:

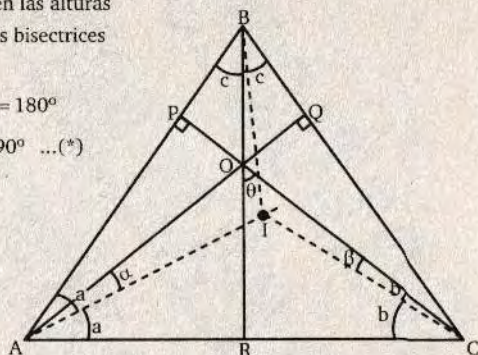
O: Ortocentro, concurren las alturas

I: Incentro, concurren las bisectrices

Por propiedad:

$$a + 2b + 2c = 180^\circ$$

$$a + b + c = 90^\circ \dots (*)$$



Por propiedad de triángulo rectángulos:

$$\triangle AOB : (\alpha + a) + 2b = 90^\circ \dots (1)$$

$$\triangle APB : (\beta + b) + 2a = 90^\circ \dots (2)$$

$$\triangle CRB : (\theta + c) + 2b = 90^\circ \dots (3)$$

$$(\alpha + \beta + \theta) + (a + b + c) + 2(2b + a) = 270^\circ$$

$$\text{De } (*) : \alpha + \beta + \theta + (90^\circ) + 2(b + a) = 270^\circ$$

$$\alpha + \beta + \theta + 2(2b + a) = 180^\circ$$

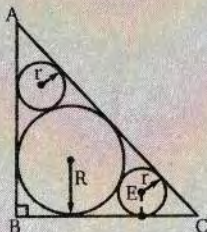
$$\text{De (I) : } \alpha + \beta + \theta + 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

$$\therefore \beta = \alpha - \theta$$

Rpta.: E

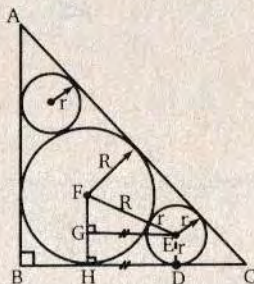
PROBLEMA 02: En la figura, si $\sqrt{R} + \sqrt{r} = 10$, entonces $BD + DE$ es :

- A) 95 u
- B) 96 u
- C) 97 u
- D) 98 u
- E) 100 u



Resolución:

Dato : $\sqrt{R} + \sqrt{r} = 10$



Del gráfico : $FB = R - r \quad \dots(1)$

Como $GE \parallel HD$, entonces:

$HD = GE \quad \dots(2)$

En el triángulo rectángulo FGE

$$GE = \sqrt{FE^2 - FG^2}$$

De (1): $GE = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$

Finalmente del gráfico:

$$BD + DE = (BH + GE) + DE$$

$$BD + DE = R + 2\sqrt{Rr} + r$$

$$BD + DE = (\sqrt{R} + \sqrt{r})^2$$

$$BD + DE = (10)^2$$

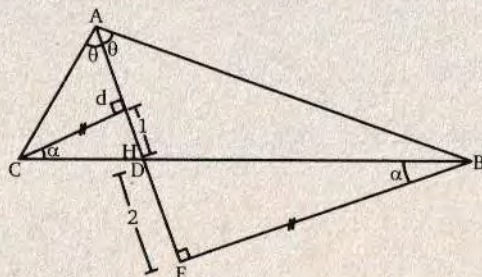
$$\therefore BD + DE = 100$$

Rpta.: E

PROBLEMA 03: En un triángulo ABC se traza la bisectriz AE que intercepta al lado $\overline{BC}$ en "D", luego desde los vértices B, C se trazan las perpendiculares $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ a dicha bisectriz. Si $HD = 1u$ y $DE = 2u$, hallar la longitud del segmento AH.

A) $5u$ B) $4u$ C) $3u$ D) $2u$ E) $1u$ **Resolución:**

Del enunciado:



El triángulo CHD es semejante al triángulo BED

$$\Rightarrow \frac{BE}{CH} = \frac{2}{1} \quad \dots(1)$$

También se tiene que el triángulo AHC es semejante al triángulo AEB

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{BE}{CH} &= \frac{d + HD + DE}{d} \\ \frac{BE}{CH} &= \frac{d + 1u + 2u}{d} = \frac{d + 3u}{d} \quad \dots(2) \end{aligned}$$

Igualando (1) y (2): $\frac{d + 3u}{d} = \frac{2}{1}$

$$\therefore d = 3u$$

Rpta.: C

PROBLEMA 04: Hallar la longitud del alado de un polígono regular de 24 lados en función del radio R de la circunferencia circunscrita a dicho polígono.

A) $R\sqrt{2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

B) $R\sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

C) $R\sqrt{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

D) $R\sqrt{2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

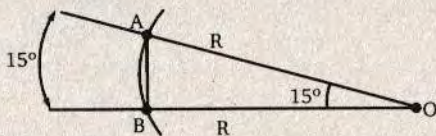
E) $R\sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

Resolución:

El lado de un polígono regular de 24 lados subtiende un arco de:

$$\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$$

Graficando:



O: Centro de la circunferencia, R: Radio de la circunferencia

El lado AB se puede calcular por la ley de cosenos, para lo cual necesitamos conocer "coseno 15° ".

$$\cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}}$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \quad \dots(I)$$

Calculo del lado AB: $AB = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos 15^\circ}$

$$AB = R\sqrt{2 - 2\cos 15^\circ}$$

De (I):

$$AB = R\sqrt{2 - 2\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}\right)}$$

$$\therefore AB = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 05:

En la figura mostrada se tiene una semicircunferencia de centro O y otras tres semicircunferencias del mismo radio $\sqrt{6}$ y centros O, O₁ y O₂. El área de la región sombreada es:

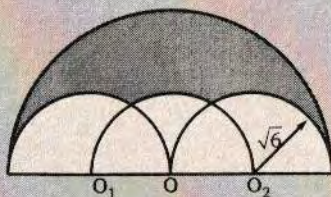
A) $(3\pi - \sqrt{3})\text{cm}^2$

B) $(5\pi + \sqrt{3})\text{cm}^2$

C) $(7\pi - 3\sqrt{3}\text{cm}^2)$

D) $(4\pi + 3\sqrt{3}\text{cm}^2)$

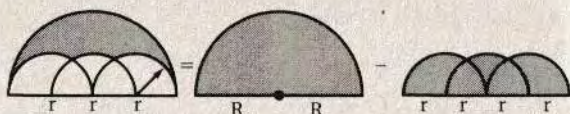
E) $(8\pi - \sqrt{3})\text{cm}^2$



Resolución:

El área de la región sombreada se obtiene :

$$A_{\text{sombreada}} = A_{\text{semicírculo}} - A_x \quad \dots (1)$$



Datos :

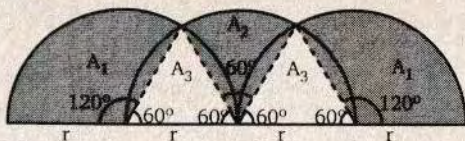
$$r = \sqrt{6} \text{ (cm)}$$

$$R = 2r = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

Cálculo del área del semicírculo:

$$A_{\text{semicírculo}} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi (2\sqrt{6})^2}{2}$$

$$A_{\text{semicírculo}} = 12\pi \quad \dots (2)$$

Cálculo del área A_x :

$$A_1 = \pi r^2 \left(\frac{120^\circ}{360^\circ} \right) = \pi (\sqrt{6})^2 \left(\frac{1}{3} \right) = 2\pi$$

$$A_2 = \pi r^2 \left(\frac{60^\circ}{360^\circ} \right) = \pi (\sqrt{6})^2 \left(\frac{1}{6} \right) = \pi$$

$$A_3 = \frac{(r) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r \right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{\sqrt{3} (\sqrt{6})^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Luego:

$$A_x = 2A_1 + A_2 + 2A_3$$

$$A_x = 2(2\pi) + (\pi) + 2 \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$A_x = 5\pi + 3\sqrt{3}$$

Finalmente, reemplazamos (2) y (3) en (1):

$$A_{\text{sombreada}} = (12\pi) - (5\pi + 3\sqrt{3})$$

$$\therefore A_{\text{sombreada}} = 7\pi - 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Rpta.: C

UNMSM - 2008 - II

PROBLEMA 06: En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y la altura relativa a ella mide 6 cm. Calcular la suma de las longitudes de los catetos

A) $9\sqrt{5}$ cm

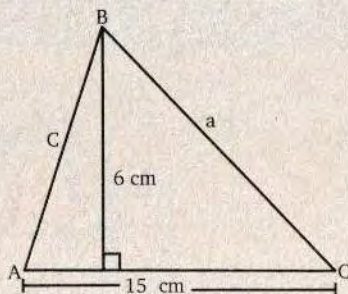
B) $6\sqrt{5}$ cm

C) $3\sqrt{5}$ cm

D) $8\sqrt{5}$ cm

E) $\sqrt{5}$

Resolución:



Nos dicen :

$$x = a + c$$

Por pitagoras :

$$a^2 + c^2 = 15^2$$

$$a^2 + c^2 = 225 \quad \dots(I)$$

Por relaciones métricas en triángulos rectángulos, se cumple:

$$a \cdot c = (6)(15)$$

$$\Rightarrow ac = 90 \quad \dots(II)$$

Sabemos que :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Entonces en el problema:

$$(a + c)^2 = a^2 + 2ac + c^2 = (a^2 + c^2) + 2ac$$

De (I) y (II) :

$$x^2 = 225 + 2(90) = 405$$

$$\therefore x = 9\sqrt{5} \text{ cm}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 07: En la figura, $AB=5$ cm, $BC=6$ cm y $AC=7$ cm. Si $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y $BD=EC$, calcular DE .

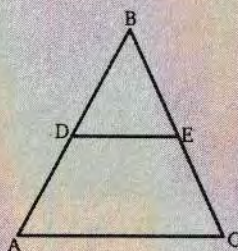
A) $\frac{35}{11}$ cm

B) 3,5 cm

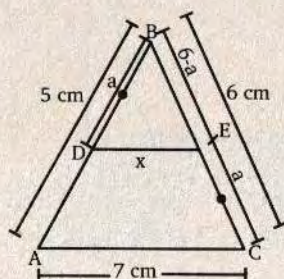
C) 3 cm

D) $\frac{41}{11}$ cm

E) $\frac{42}{11}$ cm



Resolución:



Sea : $BD = EC = a$

Nos pide : $DE = x$

Por semejanza de triángulos : $\triangle DBE \sim \triangle ABC$

$$\frac{x}{a} = \frac{7}{5} \quad \dots (I)$$

Cálculo de "a":

También : $\triangle DBE \sim \triangle ABC$

$$\frac{a}{6-a} = \frac{5}{6} \Rightarrow 6a = 30 - 5a$$

$$\Rightarrow a = \frac{30}{11}$$

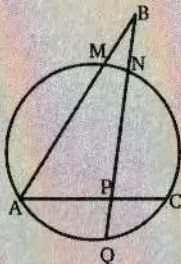
$$(II) \text{ en } (I): \quad \frac{x}{\frac{30}{11}} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{30}{11} \left(\frac{7}{5} \right)$$

$$\therefore x = \frac{42}{11} \text{ cm}$$

Rpta.: E

PROBLEMA 08: En la figura $QP = 2 PC$, AP , $AP = 4$ cm, $QP + NB = 6$ cm, $AB = 2 BN$ y "O" centro de la circunferencia. Hallar BM.

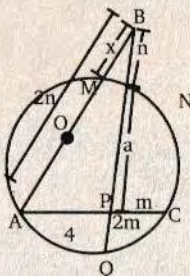
- A) 5 cm
B) 7 cm
C) 4 cm
D) 6 cm
E) 8 cm



Resolución:

Datos:

$$QP + NB = 6 \text{ cm}$$



Sean:

$$PC = m \Rightarrow QP = 2m$$

$$BN = n \Rightarrow AB = 2n$$

$$PN = a$$

Por propiedad de la secante:

$$AB \times BM = BQ \times BN$$

Pero:

$$BQ = OP + NB + PN = 6 + a$$

$$\Rightarrow (2n)x = (6 + a)n$$

$$\Rightarrow x = \frac{a + 6}{2} \quad \dots (I)$$

Por propiedad de las cuerdas:

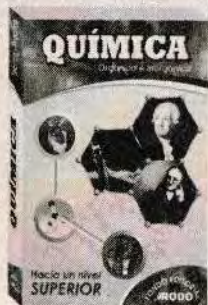
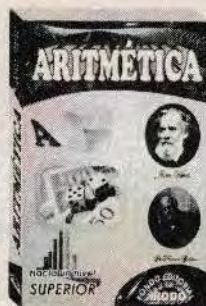
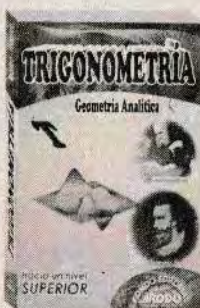
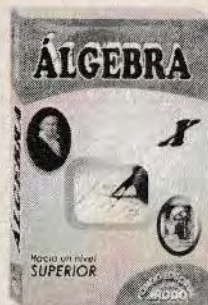
$$AP \times PC = QP \times PN$$

$$\Rightarrow 4(m) = (2m)a \Rightarrow a = 2$$

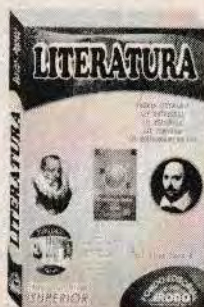
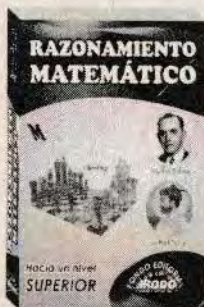
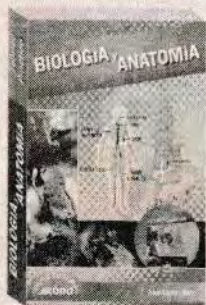
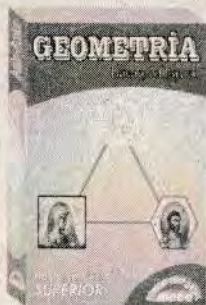
En (I):

$$\therefore x = 4 \text{ cm}$$

Rpta.: C



FONDO EDITORIAL
RODO





T. S.	TEMA
1	Segmentos - Ángulos
2	Triángulos (Propiedades, Clasificación, Congruencia y Aplic.)
3	Cuadriláteros - Polígonos
4	Circunferencia (Propiedades, ángulos de la circunferencia, cuadriláteros inscrito e inscriptible, posiciones relativas)
5	Proporcionalidad y Semejanza Triángulos - R. M. Circunferencia
6	Relaciones Métricas en Triángulos y en Cuadriláteros
7	Áreas (Triangulares - Cuadrangulares y Circulares)
8	Rectas y Planos - Diedros y Triedros
9	Poliedros y Poliedros Regulares
10	Prisma - Pirámide
11	Cilindro - Cono
12	Esfera - Teorema de Pappus
13	Polígonos Regulares - Simetría - Longitud de la Circunferencia
14	Conjuntos Convexos